通俗线性代数

于明刚　徐善从 编

山东教育出版社

一九八六年·济南

通俗线性代数

于明刚　徐善从 编

*

山东教育出版社出版
（济南经九路胜利大街）
山东省新华书店发行　山东新华印刷厂潍坊厂印刷

*

787×1092毫米 32开本 15.5印张 330千字
1986年9月第1版 1986年9月第1次印刷
印数 1－1,770

书号 13275·35　　定价 2.45元

前　　言

为了满足各类管理干部院校教学的需要，我们编写了《通俗线性代数》一书，作为教材使用．考虑到学员的基础和教学的实际，本书起点较低，内容简明，语言通俗易懂，讲解深入浅出．全书共分五章，每章、节之后分别配有适量的习题和练习题，书末附有答案或提示．本书除作为教材，也可作为电大、函大、业大、职大及中等专业学校的教学参考书．

本书第一、二、三章及练习题由于明刚同志编写，第四、五章及全部习题和习题解答由徐善从同志编写．

由于编者水平所限，不当或错误之处在所难免，敬希读者批评指正．

编　者

一九八六年二月

目　　录

第一章　预备知识 ……………………………………1
第一节　数域 ……………………………………1
第二节　排列 ……………………………………4
第三节　连加号与连乘号 ……………………………………8
本章提要 ……………………………………17
习题 ……………………………………20

第二章　行列式 ……………………………………21
第一节　二阶和三阶行列式 ……………………………………21
第二节　n 阶行列式 ……………………………………33
第三节　行列式的性质 ……………………………………43
第四节　行列式的计算 ……………………………………55
第五节　余子式和代数余子式 ……………………………………65
第六节　用代数余子式计算行列式 ……………………………………71
第七节　拉普拉斯定理 ……………………………………89
第八节　行列式的乘法定理 ……………………………………96
第九节　克莱姆法则 ……………………………………100
本章提要 ……………………………………110
习题 ……………………………………113

第三章　矩阵 ……………………………………119
第一节　矩阵的概念 ……………………………………119
第二节　矩阵的加法 ……………………………………124
第三节　数与矩阵相乘 ……………………………………130

第四节　矩阵的乘法 ……………………………………………132
第五节　矩阵乘法的运算律 ………………………………………141
第六节　矩阵的转置 ……………………………………………150
第七节　矩阵乘积的行列式、伴随矩阵 ……………………………157
第八节　逆矩阵 …………………………………………………163
第九节　逆矩阵的性质和应用 ……………………………………170
第十节　矩阵的分块 ……………………………………………176
第十一节　矩阵的初等变换 ………………………………………185
第十二节　矩阵的秩 ……………………………………………193
第十三节　简化矩阵求秩定理 ……………………………………198
第十四节　利用初等变换求逆矩阵 ………………………………207
本章提要 …………………………………………………………214
习题 ………………………………………………………………217

第四章　线性方程组 ……………………………………………222
第一节　进一步讨论用初等变换解线性方程组的方法 …………223
第二节　线性方程组有解的判别法则 ……………………………231
第三节　齐次线性方程组 …………………………………………242
第四节　n 维向量 ………………………………………………249
本章提要 …………………………………………………………282
习题 ………………………………………………………………284

第五章　二次型 …………………………………………………291
第一节　二次型的一般概念及矩阵表示 …………………………293
第二节　用满秩线性变换化二次型为标准形 ……………………300
第三节　实二次型的标准形、惯性定理 …………………………309
第四节　正定二次型 ……………………………………………316
第五节　正交矩阵与正交变换 ……………………………………322
第六节　矩阵的特征值与特征向量 ………………………………336
第七节　用正交变换化二次型为平方和 …………………………346

本章提要 ……………………………………………………………358
习题 …………………………………………………………………360
练习题答案与提示 ……………………………………………………363
习题解答…………………………………………………………………381

第一章 预备知识

在学习线性代数的过程中，常会遇到数域、排列、连加号和连乘号等知识，为了有利于学习，我们先介绍这方面的内容。

第一节 数 域

在中学里我们曾学过集合的概念，任何一组有共同属性的东西，都可以叫做一个集合，如自然数集合，整数集合，有理数集合，实数集合等，有时也把集合简称为集．如自然数集，有理数集，实数集等．组成这个集合的东西叫做集合的元素．通常以大写字母 A、B 等表示集合；以 a、b 等小写字母表示集合的元素．如果 a 是集合 A 的元素，则说 a 属于 A，记为 $a\in A$，或说 A 包含 a，记为 $A\ni a$．含有有限个元素的集合叫做有限集，含有无限个元素的集合叫做无限集．

数域的定义：设 P 是一些（有限或无限多个）数所组成的一个集合，而且 P 不只含一个数，如果对于 P 中任意二数 a,b 恒有

$$a+b\in P,$$

$$a-b\in P,$$

$$ab\in P,$$

$$\frac{a}{b}\in P\ (b\neq 0).$$

则 P 就叫做一个数域。

例如，所有的有理数所组成的集合就是一个数域，因为对任意两个有理数进行加、减、乘、除(分母不等于零)的运算，结果还得有理数。同理，所有实数的集合是实数域，所有复数的集合是复数域。

例 1　所有形如 $\alpha+\beta\sqrt{2}$ (α、β 表示有理数) 的实数所组成的集合 P 是一个数域。

证明：在这个集合 P 中任取二数

$$a=\alpha_1+\beta_1\sqrt{2},$$

$$b=\alpha_2+\beta_2\sqrt{2}$$

对 a、b 进行加、减、乘、除运算，如果运算结果均是 $\alpha+\beta\sqrt{2}$ 形的实数，则问题得证。

$$a+b=(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)\sqrt{2},$$

$$a-b=(\alpha_1-\alpha_2)+(\beta_1-\beta_2)\sqrt{2},$$

$$ab=(\alpha_1\alpha_2+2\beta_1\beta_2)+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)\sqrt{2}$$

由假设可知：α_1，α_2，β_1，β_2，均为有理数。

故　$(\alpha_1+\alpha_2)$，$(\beta_1+\beta_2)$，$(\alpha_1-\alpha_2)$，$(\beta_1-\beta_2)$，$(\alpha_1\alpha_2+2\beta_1\beta_2)$，$(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)$

均为有理数。所以

$$a+b\in P,$$

$$a-b\in P,$$

$$ab\in P$$

最后再证当 $b\neq 0$ 时

$$\frac{a}{b}\in P$$

$$\frac{a}{b}=\frac{\alpha_1+\beta_1\sqrt{2}}{\alpha_2+\beta_2\sqrt{2}}=\frac{(\alpha_1+\beta_1\sqrt{2})(\alpha_2-\beta_2\sqrt{2})}{(\alpha_2+\beta_2\sqrt{2})(\alpha_2-\beta_2\sqrt{2})}$$

$$=\frac{\alpha_1\alpha_2-2\beta_1\beta_2+(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)\sqrt{2}}{\alpha_2^2-2\beta_2^2}$$

$$=\frac{\alpha_1\alpha_2-2\beta_1\beta_2}{\alpha_2^2-2\beta_2^2}+\frac{\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2-2\beta_2^2}\sqrt{2}$$

这里必须说明$\alpha_2^2-2\beta_2^2\neq 0$。

由 $b=\alpha_2+\beta_2\sqrt{2}$可知，当$b\neq 0$时，$\alpha_2$，$\beta_2$至少有一个不等于零，因为$\sqrt{2}$是无理数，所以

$$\alpha_2-\beta_2\sqrt{2}\neq 0$$

从而

$$(\alpha_2+\beta_2\sqrt{2})(\alpha_2-\beta_2\sqrt{2})=\alpha_2^2-2\beta_2^2\neq 0$$

设

$$\alpha_3=\frac{\alpha_1\alpha_2-2\beta_1\beta_2}{\alpha_2^2-2\beta_2^2},\quad \beta_3=\frac{\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2-2\beta_2^2}$$

因α_1，α_2，β_1，β_2均为有理数，且$\alpha_2^2-2\beta_2^2\neq 0$，所以$\alpha_3$、$\beta_3$均为有理数，则

$$\frac{a}{b}=\alpha_3+\beta_3\sqrt{2}$$

故

$$\frac{a}{b}\in P$$

例2　任意一个数域P必含0与1。

证明：在数域P中任取一个数a，由数域的定义恒有

$$a-a\in P$$

所以

$$O \in P$$

因 P 中不只含一个数，所以 P 中不可能只含一个数 0，则在 P 中必存在一个数 $b \neq 0$。由数域的定义知恒有

$$\frac{b}{b} \in P$$

所以

$$1 \in P$$

根据数域的定义，我们知道一个数域中的数，经过有理运算（即加、减、乘、除）以后，所得出的数仍然在这个数域内，而在本书所讨论的问题中，所涉及到数的运算也常常只是有理运算，故可以认为在讨论问题时，所涉及到的数统统属于某一个数域。

练　习　一

1. 所有形如 $\alpha+\beta\sqrt{5}$（α、β 表示有理数）的实数集合 P 是否是一个数域？

2. 所有形如 $\alpha+\beta i$“(α,β 表示有理数，$i=\sqrt{-1}$）的复数集合 P 是否是一个数域？

第二节　排　　列

这里说的排列，就是指中学课本上讲的全排列，所以 n 个数码的全排列一共有 $n!$ 种。

定义 1　把 n 个数码 1，2，3，…，n 按照一种确定的顺序列出，称为 n 个数码的一种排列，简称 n 元排列。

例 1　写出 1、2、3 的全部排列。

解：3个数（或3元）的全排列一共有$3!=6$种。它们是：

1 2 3，1 3 2，

2 1 3，2 3 1，

3 1 2，3 2 1。

例2 写出1 2 3 4的全部排列。

解：4元排列一共有$4!=24$种，它们是：

1 2 3 4，1 2 4 3，1 3 2 4，1 3 4 2，1 4 2 3，1 4 3 2，

2 1 3 4，2 1 4 3，2 3 1 4，2 3 4 1，2 4 1 3，2 4 3 1，

3 1 2 4，3 1 4 2，3 2 1 4，3 2 4 1，3 4 1 2，3 4 2 1，

4 1 2 3，4 1 3 2，4 2 1 3，4 2 3 1，4 3 1 2，4 3 2 1。

从上面的这些排列中可以看出，有的是按自然顺序排列的，如1 2 3，1 2 3 4，如果排列的顺序是按数的大小顺序排列的（$1\ 2\ 3\cdots(n-1)n$）称为自然顺序，简称顺序。但多数排列不是按自然顺序，而是在排列中有大数排在小数之前，如2 3 1 4，2，3排在1之前。4 3 2 1，较大的数都排在较小的数之前，它们与自然顺序相反。

定义2 在一个排列中，如果有较大的数排在较小的数之前，就称这两个数组成一个逆序，逆序的总和称为这个排列的逆序数。

例3 求排列4 2 1 3的逆序数。

解：组成逆序的数对有2 1，4 2，4 1，4 3。所以，

4 1 2 3 的逆序数是 4 。

例 4　求排列 4 5 1 3 2 的逆序数。

解：在 4 5 1 3 2 中组成逆序的数对有

5 1，4 1，3 2，5 2，4 2，5 3，4 3。

所以 4 5 1 3 2 的逆序数是 7 。

从例 3 和例 4 中，我们可以得出求逆序数的方法是：先从 1 开始，看 1 前面的数有几个比 1 大的数，就是与 1 组成的逆序数。把 1 划去，再从 2 开始，看 2 前面有几个比 2 大的数，就是与 2 组成的逆序数，把 2 划去，再从 3 开始，余此类推。最后把与每个数组成的逆序数加起来之和就是这个排列的逆序数。

例 5　求排列 4 1 3 2 的逆序数

解：在 4 1 3 2 中，与 1 组成逆序的是 4 1，划去 1 得 4 3 2；与 2 组成的逆序是 3 2，4 2，划去 2 得 4 3，与 3 组成的逆序是 4 3。所以排列 4 1 3 2 的逆序数是 1 + 2 + 1 = 4，即 4 个逆序。

为方便计算，我们引用一个符号来表示一个排列的逆序数，即

$$\tau(a_1a_2\cdots a_n)$$

表示排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 的逆序数（$a_1a_2\cdots a_n$ 是 n 元排列中的任意一种排列）。如

例 3 可表示为：$\tau(4\ 2\ 1\ 3)=4$

例 4 可表示为：$\tau(4\ 5\ 1\ 3\ 2)=7$

定义 3　在一种排列中，它的逆序数如果是偶数，则称偶排列，逆序数是奇数，则称奇排列。

例如：

$\tau(4\ 2\ 1\ 3)=4$ 则4 2 1 3是偶排列。

$\tau(4\ 5\ 1\ 3\ 2)=7$ 则4 5 1 3 2是奇排列。

$\tau(1\ 2\ 3\ 4\ 5)=0$ 逆序数为零的也是偶排列。

下面研究对换对排列奇偶性的影响，就是把一个排列中某两个数的相互位置互相交换，而其余的数不动，看对这个排列的奇偶性所发生的影响。

例如：排列1 2 3，

	$\tau(1\ 2\ 3)=0$	偶排列，
对换2，3	$\tau(1\ 3\ 2)=1$	奇排列，
对换1，2	$\tau(2\ 3\ 1)=2$	偶排列，
对换1，3	$\tau(2\ 1\ 3)=1$	奇排列，
对换3，2	$\tau(3\ 1\ 2)=2$	偶排列，
对换1，2	$\tau(3\ 2\ 1)=3$	奇排列。

从上面的对换中不难看出，每经一次对换，排列就改变一次奇偶性，在这六个三元排列中奇排列和偶排列各有3个。

再观察排列1 2 3 4，

	$\tau(1\ 2\ 3\ 4)=0$	偶排列，
对换2，3	$\tau(1\ 3\ 2\ 4)=1$	奇排列，
对换2，4	$\tau(1\ 3\ 4\ 2)=2$	偶排列，
对换4，3	$\tau(1\ 4\ 3\ 2)=3$	奇排列。
………	………	………

这样总共可对换出$4!=24$种4元排列，每对换一次都要改变排列的奇偶性，显然奇排列和偶排列的个数是相等的。

从上面对3元和4元的排列中，我们可以得出以下的规律。（不从理论上证明）

(1) 对换改变排列的奇偶性。

(2) 在全部$n!$种n元排列中，奇排列和偶排列的种数相等，即各有$\frac{n!}{2}$种。

(3) 任何一个n元排列，都可以经过对换变成自然顺序 1 2 3 … n，并且所作对换的次数与所给的排列有相同的奇偶性。

例如：3元排列3 2 1，要变成1 2 3，要经过1与3的1次对换，经过的次数是奇数，所以排列3 2 1是奇排列。

再如：4元排列2 3 1 4，要变成1 2 3 4，要经过2与1、3与2两次对换，所以2 3 1 4是偶排列。

练　习　二

1. 计算下述排列的奇偶性：

(1) 1 3 5 7 2 4 6；(2) 3 5 7 8 2 1 6 4；

(3) 6 4 1 2 8 7 5 3；(4) 6 4 2 7 5 3 1。

2. 决定i、j，使

(1) 1 2 4 5 i 6 j 9 7 为奇排列；

(2) 3 9 7 2 i 5 j 4 为偶排列。

第三节　连加号与连乘号

在中小学的数学计算中，我们曾用“+”号表示数的相加，用“×”号表示数的相乘。现在我们引用符号“∑”表示数的连加，用符号“Π”表示数的连乘。

1. n个实数相加：

设 n 个实数 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$。它的和 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 可以用连加号 $\sum$ 记作

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

即

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

上式的左端表示 n 个实数之和，右端是和的展开式。当 n 是很小的自然数时，可把各项都写出来，如 $n=3$ 时就是

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = a_1 + a_2 + a_3$$

当 $n=5$ 时，就是

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

当 n 较大时，就不宜写出全部项，只需写出最前面的两项和最后的一项，中间各项用删节号"…"表示之，如 $n=100$ 时就是 $\sum_{i=1}^{100} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}$

$\sum_{i=1}^{n} a_i$ 中的下标 i 是表示和式展开时从 1 加到 n，所以也可以用其他下标表示，如用 k，j 等。例如：

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j$$

2. $m\times n$ 个实数相加：

$m\times n$ 个实数

$$a_{11}a_{12}a_{13}\cdots a_{1,n-1}a_{1n}$$
$$a_{21}a_{22}a_{23}\cdots a_{2,n-1}a_{2n}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}a_{m2}a_{m3}\cdots a_{m,n-1}a_{mn}$$

设 $m\times n$ 个实数的和为 S，为了求 S，可以先按行(横行)一个一个相加，再把所有行的和相加，即

$$\begin{aligned} S = &(a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots a_{1n}) \\ &+(a_{21}+a_{22}+a_{23}+\cdots+a_{2n}) \\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+(a_{m1}+a_{m2}+a_{m3}+\cdots+a_{mn}). \end{aligned}$$

其中设

$$b_1 = a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j},$$

$$b_2 = a_{21}+a_{22}+a_{23}+\cdots+a_{2j} = \sum_{j=1}^{n} a_{2j},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_m = a_{m1}+a_{m2}+\cdots+a_{mn} = \sum_{j=1}^{n} a_{mj}$$

一般可用

$$b_i = a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

（应注意，这里相加的足标 j 不能以 i 来代替，否则

$$b_i=\sum_{i=1}^{n} b_{ii}，\text{那就完全不同了）}$$

于是

$$\begin{aligned}S&=b_1+b_2+\cdots+b_m\\&=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}+\sum_{j=1}^{n} a_{2j}+\cdots+\sum_{j=1}^{n} a_{mj}\end{aligned}$$

但 $b_1+b_2+\cdots+b_m=\sum_{i=1}^{m} b_i$

故 $S=\sum_{i=1}^{m} b_i=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$

这里出现了二重连加号，是说明先对第二个足标 j 相加，再对第一个足标 i 相加。

例 1　当 $m=3$，$n=4$ 时，$m\times n=3\times 4=12$ 个实数．即

$$\begin{matrix}a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14},\\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24},\\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34}.\end{matrix}$$

相加时，用连加号 $\sum$ 表示出它们的和。

设这 12 个实数的和为 S 则

$$\begin{aligned}S=&(a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14})\\&+(a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24})\\&+(a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34})\end{aligned}$$

其中设

$$b_1=a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}=\sum_{j=1}^{4} a_{1j},$$

$$b_2 = a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} = \sum_{j=1}^{4} a_{2j},$$

$$b_3 = a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34} = \sum_{j=1}^{4} a_{3j}$$

一般可用

$$b_i = a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + a_{i4} = \sum_{j=1}^{4} a_{ij}$$

于是

$$S = b_1 + b_2 + b_3 = \sum_{i=1}^{3} b_i$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} a_{ij}$$

上面是先按行一个一个相加，然后再把每行的和加起来，也可以先按列一个一个相加，然后把每列的和加起来。即

$$\begin{aligned} S = &(a_{11} + a_{21} + \cdots + a_{m1}) \\ &+ (a_{12} + a_{22} \cdots + a_{m2}) \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ (a_{1n} + a_{2n} + \cdots + a_{mn}) \end{aligned}$$

其中设

$$b_1 = a_{11} + a_{21} + \cdots + a_{m1} = \sum_{i=1}^{m} a_{i1},$$

$$b_2 = a_{12} + a_{22} + \cdots + a_{m2} = \sum_{i=1}^{m} a_{i2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_n = a_{1n} + a_{2n} + \cdots + a_{mn} = \sum_{i=1}^{m} a_{in}$$

一般可用

$$b_j = a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{mj} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

于是

$$S = b_{1j} + b_{2j} + \cdots + b_n$$

$$= \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

例 2 用例 1 中的 12 个实数相加（要求先按列相加）用连加号 $\sum$ 表示它们的和.

设它们的和是 S，则

$$S = (a_{11} + a_{21} + a_{31})$$
$$+ (a_{12} + a_{22} + a_{32})$$
$$+ (a_{13} + a_{23} + a_{33})$$
$$+ (a_{14} + a_{24} + a_{34})$$

其中设

$$b_1 = a_{11} + a_{21} + a_{31} = \sum_{i=1}^{3} a_{i1},$$

$$b_2 = a_{12} + a_{22} + a_{32} = \sum_{i=1}^{3} a_{i2},$$

$$b_3 = a_{13} + a_{23} + a_{33} = \sum_{i=1}^{3} a_{i3},$$

$$b_4 = a_{14} + a_{24} + a_{34} = \sum_{i=1}^{3} a_{i4}$$

一般可用

$$b_j = a_{1j} + a_{2j} + a_{3j} = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}$$

于是

$$S=b_1+b_2+b_3+b_4$$

$$=\sum_{j=1}^{4}b_j=\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{3}a_{ij}$$

通过上面的叙述可以看出，对有两个足标的 $m\times n$ 个数，可以用二重连加号表出，表示的方法有两种，一是先对第二个足标相加，再对第一个足标相加；二是先对第一个足标相加再对第二个足标相加，相加的结果相同．（因为 S 是相同的）所以

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}$$

这说明二重加号在这种情况下是可以交换的。

3．n 个数相乘：

n 个数 b_1，b_2，$\cdots b_n$ 相乘，可用符号

$$\prod_{i=1}^{n}b_i$$

表示，即

$$\prod_{i=1}^{n}b_i=b_1\cdot b_2\cdot\cdots\cdot b_n$$

例 3　10 个数 a_1，a_2，$\cdots$，a_{10} 相乘，可表示为

$$\prod_{i=1}^{10}a_i=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_{10}$$

4。n 个数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 所有可能的差 (a_i-a_j) 的连乘积。

n 个数 a_1，$a_2\cdots$，a_n 所有可能的差 (a_i-a_j) $(1\leqslant j<i\leqslant n)$ 的连乘积可表示为

$$\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$$

这个符号是表示连乘的意思，但具体是些什么数相乘，所有可能的差(a_i-a_j)和$(1\leqslant j<i\leqslant n)$表示什么意思，可通过具体例子说明。

例如：当$n=2$时，是两个数a_1,a_2所有可能的差a_i-a_j $(1\leqslant j<i\leqslant n)$的乘积是$a_2-a_1$。即

$$\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 2}(a_i-a_j)=a_2-a_1$$

当$n=3$时，是三个数a_1，a_2，a_3这三个数所有可能的差，$a_i-a_j(1\leqslant j<i\leqslant n)$的连乘积是

$(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2)$，即

$$\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 3}(a_i-a_j)=(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2)$$

当$n=4$时有

$$\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 4}(a_i-a_j)=(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_2)(a_4-a_3)$$

当$n=100$时有

$$\begin{aligned}\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 100}(a_i-a_j)=&(a_2-a_1)(a_3-a_1)\\&(a_4-a_1)\cdots(a_{100}-a_1)\\&\cdot(a_3-a_2)(a_4-a_2)(a_5-a_2)\\&\cdots(a_{100}-a_2)\\&\cdot(a_5-a_3)(a_6-a_3)(a_7-a_3)\\&\cdots(a_{100}-a_3)\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

$$(a_{99}-a_{98})\ (a_{100}-a_{98})$$

$$(a_{100}-a_{99})$$

从而可以推出对于一般的 n 有

$$\prod_{1\leq j<i\leq n}(a_i-a_j)=(a_2-a_1)\ (a_3-a_1)$$

$$(a_4-a_1)\cdots(a_n-a_1)$$

$$\cdot(a_3-a_2)\ (a_4-a_2)$$

$$\cdots(a_n-a_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdot(a_{n-2}-a_{n-3})\ (a_{n-1}-a_{n-3})\ (a_n-a_{n-3})$$

$$(a_{n-1}-a_{n-2})\ (a_n-a_{n-2})$$

$$\cdot(a_n-a_{n-1})$$

这就是 n 个数 a_1，a_2，$\cdots a_n$ 所有可能的差的连乘积

$$\prod_{1\leq j<i\leq n}(a_i-a_j)$$

的意义。

我们已经知道，符号 $\prod$ 是表示连乘，那么

$\prod\limits_{1\leq j<i\leq n}(a_i-a_j)$表示有多少个项相乘呢？从上面的计算过程中，可找出一个规律，即

当 $n=2$ 时，有 1 项，

当 $n=3$ 时，有 3 项，等于 $1+2$ 项，

当 $n=4$ 时，有 6 项，等于 $1+2+3=6$ 项，

当 $n=100$ 时，有 $1+2+3+\cdots+99=\dfrac{99(1+99)}{2}$

$=4950$ 项。

当 n 是任意数时有

$$1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{(n-1)(1+n-1)}{2}$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}\text{项}$$

如果当 n 相当大时，要全部写出是不可能的，所以用连乘号

$$\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$$

表示。

练　习　三

展开下列各式：

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.　　　2. $\sum\limits_{i=1}^{n-1}\sum\limits_{j=1}^{5} a_{ij}$.

3. $\sum\limits_{j=1}^{5}\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_{ij}$.　　　4. $\prod\limits_{i=1}^{k}(a_i-b_i)$

本　章　提　要

1. 数域的定义

设 P 是一些（有限或无限多个）数所组成的一个集合，而且 P 不只含一个数，如果对于 P 中任意二数 a，b 恒有

$$a+b\in P,$$

$$a-b\in P,$$

$$ab\in P,$$

$$\frac{a}{b}\in P\quad(b\neq 0)$$

2．全排列的定义

把 n 个数码 1，2，3，…，n 的每一种确定的顺序列出，称为 n 个数码的一种排列．（也称 n 元排列）

3．排列的逆序数

在一种排列中，如果有较大的数排在较小的数之前，就称这两个数组成一个逆序，逆序的总和称为这种排列的逆序数．

4．奇排列与偶排列

在一种排列中，它的逆序数如果是奇数，则称奇排列，它的逆序数如果是偶数，则称偶排列．

5．表示逆序的符号

表示排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 的逆序数用符号

$$\tau(a_1a_2\cdots a_n).$$

例如，排列 4 2 1 3 的逆序数是 4，可表示为

$$\tau(4\ 2\ 1\ 3)=4.$$

4 是偶数，所以 4 2 1 3 是偶排列．

又如，排列 4 5 1 3 2 的逆序数是 7，可表示为

$$\tau(4\ 5\ 1\ 3\ 2)=7.$$

7 是奇数，所以 4 5 1 3 2 是奇排列．

6．互换排列中任意两数的位置，则改变排列的奇偶性．

例如：排列 1 3 2 4，

$\tau(1\ 3\ 2\ 4)=1$，是奇排列．

对换 2，4 得 1 3 4 2．

$\tau(1\ 3\ 4\ 2)=2$，是偶排列．

7．在全部 $n!$ 种 n 元排列中，奇排列和偶排列的个数相等，各有 $\frac{n!}{2}$ 种．

8．任何一个 n 元排列，都可以经过一些对换，变成自然顺序 1 2 3 … n 。并且所作对换的次数与这种排列有相同的奇偶性。

例如，4 元排列 1 3 4 2，要变换成 1 2 3 4，要经过 2 次对换才成（偶次），所以 1 3 4 2 也是偶排列。

9．连加号

n 个实数 a_1，a_2，…，a_n 之和

$$a_1+a_2+\cdots+a_n$$

可表示为

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

即

$$\sum_{i=1}^{n} a_i=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

10．二重连加号

$m\times n$ 个数

$$\begin{array}{l} a_{11},\ a_{12},\ \cdots a_{1n}, \\ a_{21},\ a_{22},\ \cdots a_{2n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1},\ a_{m2}\cdots a_{mn} \end{array}$$

相加，可表示为

$$\sum_{i=1}^{m}\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

也可表示为

$$\sum_{j=1}^{n}\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

在和相同的情况下，二重连加号可以交换，即

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

11．连乘号

n 个数 b_1，b_2，$\cdots b_n$ 连乘，可用符号

$$\prod_{i=1}^{n} b_i$$

表示．即

$$\prod_{i=1}^{n} b_i = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \cdots \cdot b_n$$

12．n 个数 a_1，a_2，$\cdots a_n$，所有可能的差 $(a_i - a_j)$ 的连乘积可表示为

$$\prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)$$

习　　题

1．所有形如 $\alpha + \beta x$（α, β 是有理数）的实数集合 P 是否是一个数域？并证明之．

2．排列 k 2 3 4 5 6 7 8 j，当 k，j 为何数时为偶排列？何数时为奇排列？

3．展开 $\prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - b_j)$．

第二章 行 列 式

行列式是研究线性方程组的工具，线性方程组是线性代数的基础部分，线性代数研究的主要对象是线性函数，在生产实践和科学研究中，一些变量和变量之间的关系都可以直接地或近似地表示为线性函数，因此研究线性函数是非常重要的问题．行列式是人们从解线性方程组的需要中建立起来的，它在数学本身（如研究矩阵，概率、数理统计等）和其他科学分支上（如物理，力学等）都有广泛的应用．本章研究的主要问题是：二阶和三阶行列式；n 阶行列式；行列式的性质；行列式的计算；行列式的应用等．

第一节 二阶和三阶行列式

在中学代数里，曾讲过二阶和三阶行列式，并把它作为解二元和三元线性方程组的工具，这一节先复习一下二、三阶行列式，说明它们的来源，为建立 n 元行列式的概念打下基础．

1．二阶行列式

二阶行列式是从解二元线性方程组引出来的，我们知道，任何一个二元一次方程组，经过整理、变形以后，都可以化为一般形式

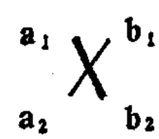
$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \tag{1}$$

用加减消元法解此方程组(1)，当数 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 时得到(1)的唯一解：

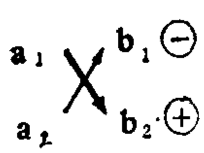
$$\begin{cases} x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1} \\ y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \end{cases} \tag{2}$$

这就是一般二元线性方程组(1)解的公式，但这个公式不便记忆，书写也不方便，因此我们便引出了新的符号来表示公式(2)的结果，这就是行列式的起源。

先把 4 个数 a_1，a_2，b_1，b_2 排成两行两列的形式：



再按照“对角线法则”（即左上角到右下角的连线称为主对角线，这两个数相乘，取正号得 a_1b_2；右上角到左下角的连线称为次对角线，这两个数相乘，取负号，得 $-a_2b_1$。然后将两个带正负号的乘积相加）得到唯一确定的数 $a_1b_2-a_2b_1$ 可用图表示如下：



$\Longrightarrow a_1b_2-a_2b_1$

为了把这个对应关系更明确地表示出来，我们用符号

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 表示由形式 $\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}$ 按对角线法则所得的数值 $a_1b_2-a_2b_1$，便得到二阶行列式的定义：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1. \tag{3}$$

比如1、2、3、4这四个数，若排为形式 $\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix}$，则得到二阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4-6=-2$，若排为形式 $\begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{matrix}$ 则得到二阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8-3=5$，这就表明4个数排成不同的形式，可以得到不同的二阶行列式。因此，我们先提到形式，后提到行列式。

注意：二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 具有形式与内容两个方面：从形式上看它很规则地排成两行两列，从内容和实质看，它是一个数 $a_1b_2 - a_2b_1$。把二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 与方程组(1)联系起来看，它的第一行是(1)中第一个方程式的未知量的系数，第二行是(1)中第二个方程式的未知量的系数；它的第一列与第二列分别是(1)中两个未知量 x 与 y 的系数。

因此，我们把 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 称为方程组(1)的系数行列式、它既能以其形式完全表示出(1)的左部情形，又能以其内容(数值)表示出(1)有唯一解的条件。这正是二阶行列式的可贵之处。

上面对于二阶行列式的分析与理解，贯穿在本章之中，对三阶行列式，n 阶行列式同样适用，希望读者注意。

这样以来，我们可以用二阶行列式的形式，把(2)式记为

整齐易记的形式

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \tag{4}$$

此式中共出现了四个二阶行列式，现在来看它们与(1)式中各系数的关系。

首先看(4)式中的分母位置的两个行列式，显然是相同的，而且都是从(1)式中未知数的系数按照其原有相对位置而排成的。所以很易记忆。再看(4)式中的分子，x 的解的分子，就是把分母上的行列式中的第 1 列换成常数项，并保持常数项原有的上下相对位置；而 y 的解的分子，是把分母上的行列式中的第 2 列换成常数项，并保持原有的上下相对位置。

总之：当组(1)的系数行数式不等于 0 时，则(1)式的解立即可以由(4)式求出，并且解是唯一的。

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases} 3x+4y=8 \\ 2x+7y=5 \end{cases}$$

解： 因为

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=21-8=13\neq 0.$$

所以

$$x=\frac{\begin{vmatrix}8 & 4\\5 & 7\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 4\\2 & 7\end{vmatrix}}=\frac{56-20}{13}=\frac{36}{13},$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}3 & 8\\2 & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 4\\2 & 7\end{vmatrix}}=\frac{15-16}{13}=-\frac{1}{13}$$

例 2　解方程组

$$\begin{cases}2x+3y=13\\5x-4y=-2\end{cases}$$

解：因为

$$\begin{vmatrix}2 & 3\\5 & -4\end{vmatrix}=-8-15=-23\neq 0$$

所以

$$x=\frac{\begin{vmatrix}13 & 3\\-2 & -4\end{vmatrix}}{-23}=\frac{-52+6}{-23}=2,$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 13\\5 & -2\end{vmatrix}}{-23}=\frac{-4-65}{-23}=3$$

2．三阶行列式．

三阶行列式是从解三元线性方程组引出来的，我们知道，任何一个三元一次方程组，经过整理、变形以后，都可以化为一般形式：

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases}$$

我们已经学会用加减消元法解此方程组，即分别用（$b_2c_3-b_3c_2$），（$b_3c_1-b_1c_3$），（$b_1c_2-b_2c_1$）乘方程组的第一、二、三式．然后把三个方程式相加，则可消去含 y 与 z 两项，得

$$(a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1)x$$
$$= (d_1b_2c_3 - d_1b_3c_2 + d_2b_3c_1 - d_2b_1c_3 + d_3b_1c_2 - d_3b_2c_1).$$

同理，可用加减消元法从方程组(1)中消去含 x，z 两项，得

$$(a_1b_1c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 ? \ a_3b_2c_1)y$$
$$= (a_1d_2c_3 - a_1d_3c_2 + a_2d_3c_1 - a_2d_1c_3 + a_3d_1c_2 - a_3d_2c_1);$$

同理，可用加减消元法从方程组(1)中消去含 x，y 两项得

$$(a_1b_1c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1)z$$
$$= (a_1b_1c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_2b_1c_2 - a_3b_2d_1).$$

当数

$$a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2c_1b_3 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \neq 0$$

时，则方程组(1)的解可立即得出

$$\begin{cases} x = \dfrac{d_1b_2c_3 - d_1b_3c_2 + d_2b_3c_1 - d_2b_1c_3 + d_3b_1c_2 - d_3b_2c_1}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1} \\ y = \dfrac{a_1d_2c_3 - a_1d_3c_2 + a_2d_3c_1 - c_2d_1c_3 + a_3d_1c_2 - a_3d_2c_1}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1} \\ z = \dfrac{a_1b_2d_3 - a_1b_3d_2 + a_2b_3d_1 - a_2b_1d_3 + a_3b_1d_2 - a_3b_2d_1}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1} \end{cases} \quad (2)$$

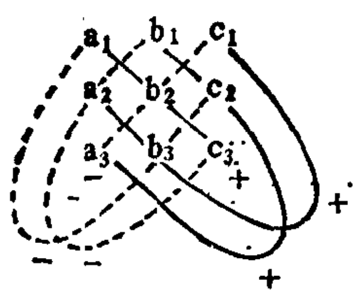
这就是一般三元一次方程组解的公式，但要记住这个公式是非常困难的，因而就又引出新的记号表示(2)的结果，这就是

三阶行列式的来源。

先把9个数a_1，a_2，a_3，b_1，b_2，b_3，c_1，c_2，c_3排成三行三列的形式

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}$$

然后按"对角线法则"，主对角线上三个数的乘积，及有一边平行于主对角线的三角形的顶点上三个数的乘积，这样的三角形有两个，在下面的图中用实线相连，前面取正号，得三个带正号的项：$a_1b_2c_3$，$a_2b_3c_1$，$a_3b_1c_2$；次对角线上三个数的乘积，及有一边平行于次对角线的三角形的顶点上三个数的乘积，这样的三角形也有两个，在下面的图中用虚线相连，前面取负号，又得三个带负号的项：$-a_3b_2c_1$，$-a_2b_1c_3$，$-a_1b_3c_2$；再把这六个带有正负号的项相加得到唯一确定的数。为便于记忆，用下面的图形表示出来



$$\Longrightarrow a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2 -a_3b_2c_1-a_2b_1c_3 -a_1b_3c_2 \text{ .}$$

为了更明确的表示上述对应关系，我们引入三阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1$$

$$-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2. \qquad (3)$$

例 3 计算行列式：

(1) $$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 2\times2\times(-5)+1\times0\times3+4\times7 \times(-3)-3\times2\times4-2\times0 \times7-1\times(-3)\times(-5)$$

$$=-20-84-24-15=-143.$$

(2) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & a & 0 \\ b & -1 & c \end{vmatrix} = 2\times a\times c+3\times(-1)\times(-1) +b\times0\times1-(-1)ab-0 \times(-1)\times2-c\times3\times1$$

$$=2ac+3+ab-3c.$$

对于三阶行列式的分析与理解，可仿照二阶行列式进行，这里不再重述。

利用三阶行列式，我们可以将三元一次方程组的解的情况叙述如下：

如果三元一次方程组(1)的系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

那么组(1)有唯一解，并且解可用下面的公式表示：

$$
\begin{cases}
x=\dfrac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \\
y=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \\
z=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}
\end{cases}
\tag{4}
$$

记忆此式要比(2)式简便得多，已经知道居于分母位置的三个相同的三阶行列式，就是由三元一次线性方程组中未知数的系数按其原有的相对位置排成的，在解题时，首先要求出此行列式的值是否等于零。只有当其不等于零时才能用(4)式求解，再看居于分子位置的三个不同的行列式,关于x的分子位置上的行列式是由(1)中的常数项$d_1d_2d_3$，去换分母位置上的行列式的第一列$a_1a_2a_3$而成（亦即用常数项去换x

的系数)；y 的解的分子，是用(1)中的常数项 $d_1d_2d_3$ 去换分母位置上的行列式的第二列 $b_1b_2b_3$ 而成（即用常数项去换 y 的系数)；z 的解的分子，是用(1)中的常数项去换分母位置上的行列式的第 3 列而成（即常数项去换 z 的系 数)。这 和二元一次方程组的解相似，不仅如此，今后我们研究 四 元、五元，一至到 n 元线性方程组的解，也同样可用四阶五阶 n 阶行列式来表示。

例 4　解方程组

$$\begin{cases} 2x-4y+z=1 \\ x-5y+3z=2 \\ x-y+z=-1 \end{cases}$$

解：这个方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -10-1-12+5+6+4=-8\neq 0$$

则方程组的解为

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-8}=\frac{11}{-8}=-\frac{11}{8},$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-8}=-\frac{9}{8},$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}2 & -4 & 1\\ 1 & -5 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}}{-8}=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}$$

例 5 解方程组

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=-2\\ 2x_1+x_2-3x_3=1\\ -x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$$

解：这个方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -3\\ -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=-1-6+2+1+3-4$$

$$=-5\neq 0$$

则方程组的解为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}-2 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}}{-5}=1,$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -3\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}}{-5}=2,$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix}1 & -2 & -2\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}}{-5}=1$$

练　习　一

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & z & 0 \end{vmatrix}$.

2. 证明：

(1) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1+c_1' \\ a_2 & b_2 & c_2+c_2' \\ a_3 & b_3 & c_3+c_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1' \\ a_2 & b_2 & c_2' \\ a_3 & b_3 & c_3' \end{vmatrix}$;

$$(5)\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

3．解下列方程组：

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -10 \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 + ax_2 + a^2x_3 = a^3 \\ x_1 + bx_2 + b^2x_3 = b^3 \\ x_1 + cx_2 + c^2x_2 = c^3 \end{cases}$$

第二节　n 阶行列式

1．n 阶行列式的定义

现在我们要讨论未知数个数等于方程式个数的一般形式的线性（即一次）方程组。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

在前面两节，我们利用二阶（三阶）行列式把二元（三元）一次方程组有解的条件、解的个数和解的形式直接地同方程组本身联系起来。这既便于记忆而且在理论上也十分有用。对于一般方程组(1)，我们自然也想采用同样的做法。为此首先我们就要定义什么是 n 阶行列式？也就是说符号

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

按什么法则对应于一个数，才能使它起到二．三阶行列式曾经起到的作用，即由它给出方程组(1)有解的条件、解的个数以及解的形式，与组(1)本身直接地联系起来．

很容易发现，“对角线法则”在这里不能使用了．

因为当$n\geq 4$时，无法用“三角形”“平行”等几何语言叙述．这就是说“对角线法则”虽然形象，易于记忆，但没有揭露出行列式的结构特点，以致不能推广到一般情形．

行列式的结构特点是它按照行和列排成规则的形式．现在我们从这一特点出发，利用第一章中的排列及排列逆序数的概念，重新认识二阶和三阶行列式以便找到能推广至一般情形的法则．

元素a_{ij}有两个下标（或足码）第一下标i表示该元素所在的行序数，第二下标j表示它所在的列序数，比如a_{23}表示位于第二行第三列的元素，这两个下标就体现了行与列的结构特点．

依前面的定义(对角线法则)，现对二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

重新研究，发现右端的代数和可以按下述法则得到：

第一，每一项都是位于不同行不同列的两个元素乘积，这样的乘积共有两个，恰好等于总行数(当然也就是总列数)

2 的全排列数 $2!=2$。

第二，每一项前面的正负号可以这样来确定：先把元素的第一下标按自然顺序排列，再看第二下标所组成的排列的奇偶性，当这个排列是偶排列时，该乘积前面取正号；当这个排列是奇排列时，该乘积前面取负号即

$a_{11}a_{22}$(12 是偶排列)前面取正号

$a_{12}a_{21}$(21 是奇排列)前面取负号

再重新分析三阶行列式．依定义(按“对角线法则”)有

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

现仿照二阶行列式那样研究三阶行列式，发现右端的代数和也可以按与上述相同的法则来确定。

第一，每一项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积，取遍所有这样的乘积，共有 6 个，恰好等于它的总行数 3 的阶乘(即是三个元素的全排列数)$3!=6$。

第二，每一项前面的正负号可以这样来确定：先把乘积的第一下标按自然顺序排列，再看第二下标所组成的排列的奇偶性，当这个排列是偶排列时，该乘积前取正号；当这个排列是奇排列时，该乘积前取负号．即

$a_{11}a_{22}a_{33}$（1　2　3 为偶排列）前面取正号

$a_{12}a_{23}a_{31}$（2　3　1 为偶排列）前面取正号

$a_{13}a_{21}a_{32}$（3　1　2 为偶排列）前面取正号

$a_{13}a_{22}a_{31}$（3　2　1 为奇排列）前面取负号

$a_{12}a_{21}a_{33}$（2　1　3 为奇排列）前面取负号

$a_{11}a_{23}a_{32}$（1　3　2 为奇排列）前面取负号，

这样一来，二、三阶行列式可以重新定义为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2}$$

$$= (-1)^{\tau(12)} a_{11} a_{22} + (-1)^{\tau(21)} a_{12} a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j1} a_{2j2} a_{3j3}$$

$$= (-1)^{\tau(123)} a_{11} a_{22} a_{33} + (-1)^{\tau(231)} a_{12} a_{23} a_{31} + (-1)^{\tau(312)} a_{13} a_{21} a_{32} + (-1)^{\tau(321)} a_{13} a_{22} a_{31} + (-1)^{\tau(213)} a_{12} a_{21} a_{33} + (-1)^{\tau(132)} a_{11} a_{23} a_{32}$$

（注意：$\sum_{j_1 j_2 j_3}$ 表示对所有不同的排列 $j_1 j_2 j_3$ 求和，共有六 个，就是最后等号右端的和）在以后的实践中表明，把这种定义推广列 n 阶行列式，是成功的，从而达到了我们的目地。

这个事实说明了“共性寓于个性之中”的真理。问题在于我们怎样从个性（二、三阶行列式）中找到本质的 规 律，推广到共性（n 阶行列式）中去。

于是，我们直接定义 n 阶行列式如下：

n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 1 、 2 … n 的任一个排列. $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有可能的排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和，恰好有 1、2、…、n 的全排列数 $n!$ 个项 $j_1j_2\cdots j_n$ 就是 1 2 … n 的一个排列，由排列的定义知，这 n 个数是由 n 个自然数按任意次序排列，因此不会重复，也就是说项

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

表示位于不同行不同列的 n 个数的乘积. 可以用上述定义可叙述为：n 阶行列式等于所有可能位于不同行不同列的 n 个数的乘积的代数和. 我们约定先把乘积中各数的第一下标(行标)排成自然顺序 1 2 … n，再看第二下标(列标)相应而成的排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的奇偶性(即 $\tau(j_1j_2\cdots nj_n)$ 的奇偶性). 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时，该乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 前面取正号，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列时，该乘积 $a_{1j_1}a_{2i_2}\cdots a_{nj_n}$ 前面取负号.

注意：在 n 阶行列式的定义中，只有加、减、乘三种运算，在用行列式表示方程组的解时，以及下一节讲到的行列式性质时，最多再增加除法运算，就是说，所有关于行列式的运算都是有理运算，因此可以取定一个数域 P 作基础，所提到的数都是数域 P 中的数，以后不另加说明.

在 4 阶行列式中，共有 $4!=24$ 个项，每一个项是 4 个不同行不同列的数的乘积，还要按定义的方法确定符号，然后取代数和，才完成一个 4 阶行列式的计算. 同样 6 阶行列式是 $6!=720$ 项的代数和. 7 阶行列式是 $7!=5040$ 个项的代数和. 当 n 相当大时，$n!$ 是非常大的数目，因而按定义计算，一般阶数较高的 n 阶行列式在实际上是无法进行的. 但是对于“特殊”一些的行列式，比如零比较多，并且排列很

规则的行列式，用定义进行计算，并不是困难的。

例 1　计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

解：计算四阶行列式要想象计算三阶行列式那样用实线连结的元素之积为正，虚线连结的元素之积为负显然是不行的，因为这样只出现 8 项，而四阶行列式实际上有 $4! = 24$ 项，所以用计算三阶行列式的方法是错误的，只有用公式

$$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_4} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$$

来计算，虽然 $j_1 j_2 j_3 j_4$ 的全排列共有 24 个，但在这个 4 阶行列式中，只有当 $j_1 = 1$，$j_2 = 2$，$j_3 = 3$，$j_4 = 4$ 时，它的通项 $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$ 才不等于零，因为每项都是从不同的行、列中各取一个元素，除 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 这一项以外，其余各项至少有一个元素是零，所以

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(1234)} 1 \times 3 \times 5 \times 6 = 90.$$

例 2　计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解：这个四阶行列式的通项是

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

只有当 $j_1=4$，$j_2=3$，$j_3=2$，$j_4=1$ 时才不为零，也就是说只有 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 这一项不为零。所以

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(4321)}abcd = (-1)^6abcd$$

$$= abcd$$

例 3　计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解：这个 n 阶行列式的通项是

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

在这个行列式第 n 行中除 a_{nn} 外，其余的元素都等于零。所以当 $j_n\neq n$ 的各项都是零，因而只要考虑含 $j_n=n$ 的项即可；再看第 $n-1$ 行中，除 $a_{n-1,n-1}$，$a_{n-1,n}$ 这两个元素外，其余的元素都等于零，因此 j_{n-1} 只有等于 $n-1$，n 这两个可能，但 $j_n=n$，而 $j_{n-1}\neq j_n$，所以 $j_{n-1}=n-1$，这样逐步推导下去可知 $j_{n-2}=n-2$，…，$j_2=2$，$j_1=1$，于是在展开式中，除去 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项外，其他各项都等于零，而这一项每个因子的第二个下标排列成自然顺序，即逆序数是零，所以符号为正，于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这种行列式称上三角形行列式，主对角线（从左上角到右下角的对角线）以下的元素全为零，它的值等于主对角线上元素的相乘积。

读者自证下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

对角形行列式即主对角线以外的元素全为零

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

3. n 阶行列式的第二种定义形式

上面讲的 n 阶行列式的展开，它的通项是

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

特点是第一个下标（即行标）按自然顺序排列，第二个下标 $j_1j_2\cdots j_n$(列标)是 1，2，…，n 的一种排列，正负号是根据 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$的奇偶性而定，现在我们把第二个下标按自然顺序 $12\cdots n$ 排行，第一个下标是 $12\cdots n$ 的一种排列，表示为 $i_1i_2\cdots i_n$，它的通项是 $a_{i_1,1}\ a_{i_2,2}\cdots a_{i_n,n}$，则这一项的符号由 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$的奇偶性而定，于是有下面的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1,1} a_{i_2,2} \cdots a_{i_n,n}$$

例如三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 i_3} (-1)^{\tau(i_1 i_2 i_3)} a_{i_1,1} a_{i_2,2} a_{i_3,3}$$

4. n 阶行列式的第三种定义形式。

如果 n 阶行列式的通项每个因子的两个下标都不是按自然顺序 $12\cdots n$ 排列的，而第一个下标是 $i_1 i_2 \cdots i_n$，第二个下标是 $j_1 j_2 \cdots j_n$，则它的通项是 $a_{i_1,j_1} a_{i_2,j_2} \cdots a_{i_n,j_n}$，其符号是

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$$

于是 n 阶行列式又可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_n \\ j_1 j_2 \cdots j_n}} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1,j_1} a_{i_2,j_2} \cdots a_{i_n,j_n}$$

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{i_1 i_2 i_3 \\ j_1 j_2 j_3}} (-1)^{\tau(i_1 i_2 i_3) + \tau(j_1 j_2 j_3)} a_{i_1,j_1} a_{i_2,j_2} a_{i_3,j_3}$$

例 4　确定下列两项的符号：

（1）$a_{31} a_{42} a_{13} a_{24}$.

解： $\tau(3\ 4\ 1\ 2) = 4$

即逆序数是偶数，故此项为正，

（2）$a_{21}a_{32}a_{14}a_{43}$

解：$\tau(2\ 3\ 1\ 4)+\tau(1\ 2\ 4\ 3)=2+1=3$

即两个下标排列的逆序之和是奇数，故此项为负。

练　习　二

1．确定下列各项的正负：

（1）$a_{12}a_{24}a_{31}a_{45}a_{53}$；

（2）$a_{13}a_{31}a_{24}a_{42}a_{56}a_{65}$；

（3）$a_{41}a_{32}a_{23}a_{54}a_{15}$。

2．写出下列5阶行列式的展开式中含有$a_{13}a_{25}$并带正号的所有项．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{25} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{51} & a_{52} & \cdots & a_{55} \end{vmatrix}$$

3．计算：

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

4．计算

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{vmatrix}$$

5. 计算

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3+x \end{vmatrix}$$

6. 计算

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & 0 \\ c_1 & d_2 & 0 & 3 \\ b_2 & c_2 & d_1 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

第三节 行列式的性质

根据行列式的定义，直接计算行列式是很麻烦的，因为对任何一个n阶行列式，都要计算$n!$个项，而每项又是n个数相乘，所以一共需要作$n!(n-1)$次乘法，当n增大时它的项数$n!$增加的速度是相当惊人的，如当

$n=7$ $7!=5,040$,

$n=10$ $10!=3,628,800$,

$n=15$ $15!\approx1,307,674\times10^6$,

$n=20$ $20!\approx2,432,904\times10^{12}$

可见，要计算20阶行列式，仅所作乘法的次数就是

$$20!\times19\approx4,622,513\times10^{13}$$

至于它的具体数字是难以想象的，即使用一台每秒能作一亿次运算的电子计算机来作这么多次的乘法，也得用一万余年。如果人的计算速度是一分钟一次的话，需60万亿年才

能算完，这是无法实现的，因此必须对行列式作进一步地研究，找出切实可行的计算方法，这就必须对行列式的性质进行讨论。

性质 1　如果把行列式的某一行中所有元素同乘以K，其结果等于用K乘原行列式。或者说行列式的某一行中所有元素如有公因子K，则可把K提到行列式的前面。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i_1} & ka_{i_2} \cdots & ka_{i_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n_1} & a_{n_2} \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = K \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots\cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

在证明(1)式之前，先举例验证(1)式成立，例如三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 = d$$

现在用 2 乘行列式的第 3 行

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2\times 2 & 2\times 3 & 2\times 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 20 = 2d,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\times 10 = 20 = 2d$$

特别是当$K=0$时，行列式的值是零。也就是说如果行列式中的某一行元素全为 0，则此行列式的值为 0。如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2 & 4 & 5 \\ 0\times 3 & 0\times b & 0\times c \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & b & c \end{vmatrix} = 0$$

然后证明(1)式成立。

(1) 式左端的通项可写为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots ka_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$
$$= Ka_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

根据n阶行列式的定义，(1)式左端可表示为n！项代数和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}ka_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$= K\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

因通项中含因子k，就是代数和的每一项都含因子k，所以k可以提到代数和的外面。

再看(1)式右端

$$K\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = K\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

左端 = 右端。

性质 2 如果行列式某行的所有元素，都可以写成两 项的和，则这个行列式等于两个行列式的和。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} \cdots\cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{i1} a_{i2} \cdots a_{in} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

在证明之前先举列验证，然后给出证明。例如：

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1+1 & 1+2 & 2+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

左端

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1+1 & 1+2 & 2+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 10$$

右端

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 5+5=10$$

证明：

(2) 式左端的通项为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(a_{ij_i}+a'_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$$

左端的行列式可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{ij_1}+a'_{ij_1} & a_{ij_2}+a'_{ij_2}\ \cdots\cdots & a_{ij_n}+a'_{ij_n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(a_{ij_i}+a'_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}(a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}+a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a'_{ij_i}\cdots a_{nj_n})$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}+\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a'_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

(2) 式右端两个行列式的通项分别为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n},$$

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a'_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

右端两个行列式之和可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots\cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$+ \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a'_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

于是，左端＝右端。

性质 3　行列式中的任意两行互换，行列式只改变符号。即

$$\begin{matrix} \\ \\ i\text{行} \\ \\ k\text{行} \\ \\ \\ \end{matrix}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots\cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ak_1 & ak_2 & \cdots\cdots & ak_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ak_1 & ak_2 & \cdots\cdots & ak_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots\cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ i\text{行} \\ \\ k\text{行} \\ \\ \\ \end{matrix} \quad (3)$$

先举例验证，然后给出证明．例如

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -18$$

将二、三两行互换得

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = +18$$

证明：(3)式，左端的通项为

$$a_{1j_1}\,a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n}$$

行标是按自然顺序

$$1\ 2\cdots i\cdots k\cdots n$$

排列的

列标是按

$$j_1\, j_2 \cdots j_i \cdots j_k \cdots j_n$$

排列的。

$$\text{左端} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{nj_n}$$

第 i 行和第 k 行交换后，变成右端，行标排列的顺序由

$$1\ 2 \cdots i \cdots k \cdots n \ (\text{自然顺序})$$

变为

$$1\ 2 \cdots k \cdots i \cdots n$$

(第 i 个)(第 k 个)

这个排列是由自然顺序经一个对换，所以逆序数是奇数，即

$$\tau(12 \cdots k \cdots i \cdots n) = \text{奇数}$$

但两行交换以后，列标排列顺序未变，仍然是按

$$j_1\, j_2 \cdots j_i \cdots j_k \cdots j_n$$

排列的，所以（3)式右端的通项是

$$a_{1j_1}\, a_{2j_2} \cdots a_{kj_i} \cdots a_{ij_k} \cdots a_{nj_n}.$$

$$\text{右端} = -\sum_{\substack{12 \cdots k \cdots i \cdots n \\ j_1 j_2 \cdots j_i \cdots j_k \cdots j_n}} (-1)^{\tau(12 \cdots k \cdots i \cdots n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_i \cdots j_k \cdots j_n)}$$

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{kj_i} \cdots a_{ij_k} \cdots a_{nj_n}$$

$$= -\sum_{\substack{12 \cdots k \cdots i \cdots n \\ j_1 j_2 \cdots j_i \cdots j_k \cdots j_n}} (-)(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_i \cdots j_k \cdots j_n)}$$

$$a_{1j_1}\, a_{2j_2} \cdots a_{kj_i} \cdots a_{ij_k} \cdots a_{nj_n}$$

但式中因子 a_{kj_i} 实际上是第 i 行的元素，因子 a_{ij_k} 实际上是第 k 行的元素，所以可分别写成 a_{ij_i}，a_{kj_k}，于是上式可

写成

$$-(-1)\sum_{\substack{12\cdots i\cdots k\cdots n\\ j_1j_2\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n}}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}$$

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

右端＝左端。

根据性质3，可得到下面两个推论：

推论1　行列式中如有两行相同，则这个行列式等于零。

因为把行列式A中相同的两行互换，行列式不变，但由性质3知符号相反，则$D=-D$，即$2D=0$，故$D=0$。

推论2　行列式中如有两行成比例，则这个行列式等于零。

因为行列式中如果两行成比例，则必然出现第i行的各元素是第k行各对应元素的n倍，把第i行的公因子提到行列式前面，便得出i行和k行相同的行列式，由推论1可知，这个行列式等于零。

性质4　如果把行列式某行中各元素同乘以m后，加到另一行对应的元素上，则这个行列式不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots\cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots\cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1}+ma_{k1} & a_{i2}+ma_{k2} & & a_{in}+ma_{kn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} \qquad (4)
$$

先举例验证，然后给出证明。

例如：
$$
\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 10
$$

将第 1 行各元素乘以 2，加到第 2 行对应的元素上。

$$
\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4+2\times 2 & 3+1\times 2 & 1+2\times 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 5\times 2 = 10
$$

证明：

$$
右端=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots\cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{k1} & a_{k2} & \cdots\cdots & a_{kn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
+\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
ma_{k1} & ma_{k2} & \cdots\cdots & ma_{kn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{k1} & a_{k2} & \cdots\cdots & a_{kn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
a_{n} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots\cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{k1} & a_{k2} & \cdots\cdots & a_{kn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}+0=左端
$$

性质 5 行列式与它的转置行列式相等。（即一行与一列，二行与二列……的相对位置互相交换行列式不变）即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots\cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{5}$$

先进行验证，再给出证明。

例如

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 22, \quad \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 22$$

所以

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

证明：在(5)式左端行列式中的元素 a_{ij}，位于 i 行 j 列，而该元素在(5)式右端行列式中位于 j 行 i 列。

左端行列式的通项是

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$左端 = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

右端行列式的通项是

$$a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}$$

$$右端 = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}$$

根据 n 阶行列式展开的另一种形式可知，左端等于右端。

这个性质是很重要的，它告诉我们，在行列式中，行与列所处的地位是相同的，因此，凡是对行成立的性质，对列

也都成立，反之，对列成立的性质对行也都成立。

例 1．求证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0\cdots\cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0\cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

解：这是一个下三角形行列式，在第二节中曾叫读者自证，现在可以经过转置成上三角形行列式。上节已证过上三角形行列式等于主对角线上元素的相乘积。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0\cdots\cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0\cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}\cdots\cdots & a_{n1} \\ 0 & a_{22}\cdots\cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0\cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\quad a_{22}\cdots\cdots a_{nn}$$

练　习　三

1．计算行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$； -8

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & b \\ a & a & b & a \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$.

3. 验证

$$\begin{vmatrix} a_1+ka_2+la_3 & a_2+ma_3 & a_3 \\ b_1+kb_2+lb_3 & b_2+mb_3 & b_3 \\ c_1+kc_2+lc_3 & c_2+mc_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

第四节　行列式的计算

根据行列式的五个性质和两个推论，便可以对行列式进行计算，本节主要通过举例使之学会用行列式的性质来计算和证明一些行列式。

例 1. 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 2+a_1 & 3+a_1 \\ 1+a_2 & 2+a_2 & 3+a_2 \\ 1+a_3 & 2+a_3 & 3+a_3 \end{vmatrix}$$

解：从第三列减去第二列，从第二列减去第一列，得出2，3两列相等的行列式，其结果等于零．即

$$D=\begin{vmatrix}1+a_1 & 2+a_1 & 3+a_1\\ 1+a_2 & 2+a_2 & 3+a_2\\ 1+a_3 & 2+a_3 & 3+a_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1\\ 1+a_2 & 1 & 1\\ 1+a_3 & 1 & 1\end{vmatrix}=0.$$

例2　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}-2 & 5 & -1 & 3\\ 1 & -9 & 13 & 7\\ 3 & -1 & 5 & -5\\ 2 & 8 & -7 & -10\end{vmatrix}$$

解：在计算行列式中，如果能把行列式化为三角形行列式，则其值都等于对角线上元素的乘积．化为三角形行列式的一般方法是：先互换行或列使左上角的元素为1，再把第一行（或列）的其他元素化为零，最后把主对角线以上（或以下）的其他元素全化为零，即成为三角形行列式．对这个行列式我们就设法化为三角形行列式．

交换1，2两行得

$$D=-\begin{vmatrix}1 & -9 & 13 & 7\\ -2 & 5 & -1 & 3\\ 3 & -1 & 5 & -5\\ 2 & 8 & -7 & -10\end{vmatrix}$$

2行加1行乘以2，3行减1行乘以3，4行减1行乘以2得

$$-\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 26 & -33 & -24 \end{vmatrix}$$

3 行加 2 行乘以 2，4 行加 2 行乘以 2，得

$$-\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 17 & 10 \end{vmatrix}$$

4 行减 3 行乘以$\frac{17}{16}$，得

$$-\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{vmatrix}$$

$$= -1\times(-13)\times 16\times\frac{3}{2}$$

$$= 13\times 8\times 3 = 312.$$

例 3　求证

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

证明：左端由性质 2 得

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ q & r+p & p+q \\ y & z+x & x+y \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ r & r+p & p+q \\ z & z+x & x+y \end{vmatrix}$$

由性质2和推论1得

$$\begin{vmatrix} b & c+a & a \\ q & r+p & p \\ y & z+x & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c & a & a+b \\ r & p & p+q \\ z & x & x+y \end{vmatrix}$$

由性质2和推论1得

$$\begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c & a & b \\ r & p & q \\ z & x & y \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

左端＝右端

例4　计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a & a_2 & a_2 \\ a_2 & a_2 & a & a_3 \\ a_3 & a_3 & a_3 & a \end{vmatrix}$$

解：用 $-a_1$，$-a_2$，$-a_3$ 乘第一行，分别加到第2，3，4行上，得

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & a-a_1 & a_2-a_1 & a_2-a_1\\0 & 0 & a-a_2 & a_3-a_2\\0 & 0 & 0 & a-a_3\end{vmatrix}$$

$$=(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)$$

例 5 计算

$$D=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1 & 1\\1 & 3 & 1 & 1\\1 & 1 & 3 & 1\\1 & 1 & 1 & 3\end{vmatrix}$$

解：这个行列式的特点是各行各列4个数的和都是6，把2，3，4各列都加到第一列上去，把公因子6提出来，然后从2，3，4各列中减去第一列，结果成为上三角形行列式。

$$D=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1 & 1\\1 & 3 & 1 & 1\\1 & 1 & 3 & 1\\1 & 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6 & 1 & 1 & 1\\6 & 3 & 1 & 1\\6 & 1 & 3 & 1\\6 & 1 & 1 & 3\end{vmatrix}$$

$$=6\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 3 & 1 & 1\\1 & 1 & 3 & 1\\1 & 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\1 & 2 & 0 & 0\\1 & 0 & 2 & 0\\1 & 0 & 0 & 2\end{vmatrix}$$

$$=6\times 2^3=48$$

例 6 计算

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & a \\ a & 0 & a & b \\ b & a & 0 & a \\ a & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

解：利用性质 4，使之变换成三角形行列式。

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & a \\ a & 0 & a & b \\ b & a & 0 & a \\ a & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -b & 0 & b & a \\ 0 & -b & a & b \\ b & 0 & 0 & a \\ 0 & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -b & 0 & b & a \\ 0 & -b & a & b \\ 0 & 0 & b & 2a \\ 0 & 0 & 2a & b \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} -b & 0 & b-a & a \\ 0 & -b & a-b & b \\ 0 & 0 & b-2a & 2a \\ 0 & 0 & 2a-b & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -b & 0 & b-a & a \\ 0 & -b & a-b & b \\ 0 & 0 & b-2a & 2a \\ 0 & 0 & 0 & b+2a \end{vmatrix}$$

$= (-b)(-b)(b-2a)(b+2a) = b^2(b^2-4a^2)$.

例 7　计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解：$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a+n-1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+n-1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$

$$
=(a+n-1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & a & 1 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a\end{vmatrix}
$$

$$
=(a+n-1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-1\end{vmatrix}=(a+n-1)
$$

$(a-1)^{n-1}$

例 8　奇数阶反对称行列式等于零.

先说明什么样的行列式是对称行列式和反对称行列式.

当行列式中的元素满足 $a_{ij}=a_{ji}$ 时，称为对称行列式，如三阶对称行列式

$$
\begin{vmatrix}1 & 7 & a\\ 7 & 5 & 2\\ a & 2 & 3\end{vmatrix}
$$

n 阶对称行列式表示为

$$
\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}
$$

对称行列式主对角线上的元素可以是任意的.

当行列式中的元素满足 $a_{ij}=-a_{ji}$ 时，称为反对称行列式. 如三阶反对称行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 7 & a \\ -7 & 0 & -2 \\ -a & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

n 阶反对称行列式可表示为

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

应注意，反对称行列式主对角线上的元素一定全是零，否则就不能使 $a_{ij}=-a_{ji}$

现证明奇数阶反对称行列式等于零。

证明：设

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

是一个反对称行列式，它的阶数 n 是一个奇数，现证明 $D=0$。

先将反对称行列式转置，然后提出公因子（-1），得

$$D=\begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} \cdots \cdots \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-D$$

$$D=-D,\ 2D=0$$

所以

$$D=0$$

例 9　计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & b\cdots\cdots b \\ b & a & b\cdots\cdots b \\ b & b & a\cdots\cdots b \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b\cdots\cdots a \end{vmatrix}$$

解：这个行列式的特点是每一行只有一个元素 a，其余的 $n-1$ 个元素都是 b，显然各行的元素都相等，现把各列的元素都加到第 1 列上去，得行列式

$$D=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b\cdots\cdots b \\ a+(n-1)b & a & b\cdots\cdots b \\ a+(n-1)b & b & a\cdots\cdots b \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a+(n-1)b & b & b\cdots\cdots a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b\cdots b \\ 1 & a & b\cdots b \\ 1 & b & a\cdots b \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b & b\cdots a \end{vmatrix}$$

从第二行起到第 n 行，各行都减去第 1 行．得

$$[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b\cdots\cdots & b \\ 0 & a-b & 0\cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

练 习 四

1．计算行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$．

2．证明：

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix} = a$$

（提示：先化为三角形行列式）

3．计算

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 5 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 6 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$．

第五节　余子式和代数余子式

从上一节计算的行列式中可知，阶数越低越容易计算，

因此我们会自然想到，能否把一个阶数较高的行列式化为阶数较低的行列式。下面就研究这个问题。

1. 三阶行列式用二阶行列式表示

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

这样就把三阶行列式降为二阶行列式，每项提出的公因子都是第一行的元素。同样也可以提出第二行或第三行的元素，分别由余下的四个元素再组成二阶行列式。例如：

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

2. 四阶行列式用三阶行列式表示

我们已经知道四阶行列式展开共有 24 项，把含有公因子 a_{11}，a_{12}，a_{13}，a_{14} 分别集中起来，提出公因子，便可用三阶行列式表示，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$-a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

从三阶和四阶行列式可以用二阶和三阶行列式表示的事实中，可以引导我们想象五阶、六阶…能不能用四阶、五阶…行列式表示呢？即使到 n 阶行列式都能用降阶的方法表示，但展成 $n!$ 项再提公因子，也是相当麻烦的，为便于计算，我们引入新的概念。

3. 余子式的定义

在 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1j}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2j}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots a_{ij}\cdots a_{in} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nj}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的全部元素，剩下的原素按原来的相对位置，构成一个 $n-1$ 阶行列式。即

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12}\cdots\cdots\cdots a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22}\cdots\cdots\cdots a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\
a_{i-1,1} & a_{i-1,2}\cdots a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1}\cdots a_{i+1,n} & & \\
a_{i+1,1} & a_{i+1,2}\cdots a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1}\cdots a_{i+1,n} & & \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\
a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots\cdots a_{n,j-1} & a_{n,j+1}\cdots\cdots a_{nn} & &
\end{vmatrix}
$$

称为元素 a_{ij} 的余子式，记为

$$M_{ij}$$

行列式中任何一个元素都有与之相对应的余子式，例如三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中的 9 个元素 a_{11}，a_{12}，…，a_{33} 的余子式分别为

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},\quad M_{21}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$M_{22}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{23} \end{vmatrix},\quad M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},\quad M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix},$$

$$M_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

因此三阶行列式可用各行元素的余子式来表示：

$$\begin{aligned} D &= a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13} \\ &= -a_{21}M_{21}+a_{22}M_{22}-a_{23}M_{23} \\ &= a_{31}M_{31}-a_{32}M_{32}+a_{33}M_{33} \end{aligned}$$

实际上，这个等式就是把三阶行列式展开后，分别把各行的元素作为公因子提出而得．如果分别把各列的元素作为公因子提出，又可得

$$\begin{aligned} D &= a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+a_{31}M_{31} \\ &= -a_{12}M_{12}+a_{22}M_{22}-a_{32}M_{32} \\ &= a_{13}M_{13}-a_{23}M_{23}+a_{33}M_{33} \end{aligned}$$

从以上等式中可以看出，M_{ij} 前面的符号有时为正，有时为负，但可从中找出一个规律，当 $i+j$ 为偶数时，符号为正，当 $i+j$ 为奇数时符号为负．为进一步研究这一问题，我们给出下面的定义．

4．代数余子式的定义

在 n 阶行列式中，任一元素 a_{ij} 的余子式为 M_{ij}，设 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式．

例如：用代数余子式表示三阶行列式

$$\begin{aligned} D &= a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} \\ &= a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23} \\ &= a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33} \end{aligned}$$

一般可表示为

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}. \quad (i=1,2,3)$$

如果三阶行列式按列展开，一般可表示为

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}. \quad (j=1,2,3)$$

例 1　求

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

的余子式M_{11}，M_{12}，M_{13}；代数余子式A_{11}，A_{12}，A_{13}及D的值.

解：$M_{11}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=4$，$M_{12}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=2$，

$$M_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=5$$

$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=4$，　$A_{12}=(-1)^{1+2}=-2$，

$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=5$，

$D=1\cdot A_{11}+0\cdot A_{12}+(-1)\cdot A_{13}$，

$1\cdot 4+0\cdot(-2)+(-1)\cdot 5=-1$

例 2　求行列式D的值.

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

解：例 2 与例 1 只有第一行的元素不同，所以第一行各元素的代数余子式与例 1 的代数余子式是相同的，即

$D=aA_{11}+bA_{22}+cA_{33}=4a-2b+5c$

练　习　五

1. 求

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

第三行各元素的余子式。

2. 求

$$D=\begin{vmatrix}a & 1 & 2 & 3\\ b & -1 & 0 & b\\ c & 0 & 2 & 3\\ d & 1 & -1 & -2\end{vmatrix}$$

第一列各元素的代数余子式。

3. 求

$$D=\begin{vmatrix}3 & 1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1 & -2\end{vmatrix}$$

第一列各元素的代数余子式，及D的值。

第六节　用代数余子式计算行列式

从三阶行列式可用二阶代数余子式计算，四阶行列式可用三阶代数余子式计算的事实中，我们可以得出五阶、六阶、……（$n-1$）阶行列式都可以用低一阶的代数余子式进行计算，那么n阶行列式怎样用代数余子式进行计算呢？这是本节研究的主要问题。

定理1　n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn}\end{vmatrix}$$

等于它任意一行的所有元素与其对应的代数余子式的乘积之和。即

$$D=a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+\cdots+a_{kn}A_{kn}\quad(k=1,2,\cdots n)$$

式中的 k 表示从 1 到 n 中任意一行都可，如要按第 3 行元素展开，则 k 就取 3 。即

$$D=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+\cdots+a_{3n}A_{3n}$$

这一定理的证明是比较复杂的，为帮助理解，我们先从特殊情况证起。

（1）当第 1 行除第 1 个元素外，其他元素都等于零时有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0\cdots 0 \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}$$

证明：将此行列式展开用连加号表示得

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

因为 $a_{12}=a_{13}=\cdots=a_{1n}=0$，只有 $a_{11}\neq0$，所以只有当 $j_1=1$ 时 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\neq0$，于是有

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$=a_{11}\sum_{j_2 j_3\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_2 j_3\cdots j_n)}a_{2j_2}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\cdots a_{2n} \\ a_{32} & a_{33}\cdots a_{3n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n2} & a_{n3}\cdots a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}A_{11}.$$

右端＝左端。

（2）当行列式D第i行的元素除a_{ij}外，其余元素全为零时有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1j}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2j}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0\cdots & \cdots a_{ij}\ \cdots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nj}\cdots a_{nn}\end{vmatrix}=a_{ij}A_{ij}$$

根据（1）的结果，可将此行列式作以下的变换：把第i行依次与$i-1$，$i-2$行，…，1行对换，这样a_{ij}就调到第1行的位置，对换的次数为$i-1$次，行列式D的符号也改变了$i-1$次，即

$$D_1=(-1)^{i-1}\begin{vmatrix} 0 & 0\cdots\cdots\cdots a_{ij}\cdots\cdots\cdots 0 \\ a_{11} & a_{12}\cdots\cdots\cdots a_{1j}\cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2}\ \cdots\ a_{i-1,j}\cdots a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2}\ \cdots\ a_{i+1,j}\cdots a_{i+1,n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots\cdots a_{nj}\cdots\cdots\cdots a_{nn}\end{vmatrix}$$

再把 D_1 中第 j 列依次与 $j-1$ 列，$j-2$ 列… 1 列交换，把 a_{ij} 调换到第一行第一列，对调的次数是 $j-1$ 次，即

$$D_2=(-1)^{i-1}(-1)^{j-1}\begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots\cdots 0 & 0\cdots\cdots\cdots 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots a_{1,j-1} & a_{1,j+1}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{i-1,j} & a_{i-1,1}\cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1}\cdots a_{i-1,n} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,1}\cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1}\cdots a_{i+1,n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{nj} & a_{n1}\cdots\cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{i+j-2}a_{ij}A_{ij}=a_{ij}A_{ij}$$

$D=D_2$，即左端＝右端。

将上面的证明作为预备知识，再证一般情况。

（3）求证

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots\cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots$$

$$+a_{in}A_{in}$$

证明：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+0+\cdots+0\cdots & 0+0+\cdots+a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{i1} & 0 \cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{1n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{n2} \cdots a_{nn} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & a_{i2} \cdots \quad 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} \; a_{12} \cdots a_{11} \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0 \;\; 0 \cdots\cdots a_{in} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \; a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

因为行列式关于行的性质都适用于列，所以有

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

这就是说行列式不仅可以按行展开，使行列式等于任意一行的各个元素与其对应的代数余子式相乘积之和，同时也可按列展开，使行列式等于任意一列的各个元素与其对应的代数余子式相乘积之和。

例 1　把行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

按第二行和第三列分别展开

(1) 按第二行展开得

$$D = (-4)\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+1\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-4+18-4=10$$

（2）按第三列展开得

$$D=2\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-4 & 3\\ 2 & 3\end{vmatrix}+1\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}$$

$$+5\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ -4 & 3\end{vmatrix}=-36-4+50=10$$

定理 2　在行列式中任意一行的元素与另一行相对应的元素的代数余子式的乘积之和等于零。即

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=0$$

证明：

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\qquad(1)$$

现将D的展开式中的a_{i1}　$a_{i2}\cdots a_{in}$依次换成a_{k1}　$a_{k2}\cdots a_{kn}$，使(1)式变成

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}\qquad(2)$$

（2）式就是行列式D中的K行元素乘i行元素对应的代数余子式相乘积之和，只要能证明(2)式等于零，则问题得证。

因行列式D的展开式中的a_{i1}，a_{i2}，$\cdots a_{in}$，依此换成a_{k1}，$a_{k2},\cdots,a_{kn}$就是将行列式D中的第i行元素换成第K行元素，从而使D变成两行相同的行列式D，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} i\text{行} \\ =0 \end{matrix}$$

将D按i行展开得

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in} \tag{2}$$

即(2)式等于零

因为行列式的行与列有对称性，所以在定理 2 中把行换成列也成立，即

$$a_{1k}A_{1j}+a_{2k}A_{2j}+\cdots+a_{nk}A_{nj}=0$$

对定理 1 和定理 2 归纳起来可这样表示：

设在行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中，A_{ij}表示元素a_{ij}的代数余子式，则下列公式成立：

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{cases} D & \text{当}\ k=i \\ O & \text{当}\ k\neq i \end{cases}$$

$$a_{1k}A_{1j}+a_{2k}A_{2j}+\cdots+a_{nk}A_{nj}=\begin{cases}D & 当\ k=j\\ O & 当\ k\neq j\end{cases}$$

如果用和的符号表示连加可写成

$$\sum_{s=1}^{n}a_{ks}A_{is}=\begin{cases}D & 当\ k=i\\ O & 当\ k\neq i\end{cases}$$

$$\sum_{s=1}^{n}a_{sk}A_{sj}=\begin{cases}D & 当\ k=j\\ O & 当\ k\neq j\end{cases}$$

在实际计算中，如果直接把 n 阶行列式化为 $n-1$ 阶再计算，并不减少工作量，因此要与行列式的性质结合起来，先把某行或某列的元素尽可能多地化为零，因为元素为零的代数余子式与零之乘积为零，这样可使计算简化。

例 2　计算

$$D=\begin{vmatrix}3 & 1 & -1 & 2\\ -5 & 1 & 3 & -4\\ 2 & 0 & 1 & -1\\ 1 & -5 & 3 & -3\end{vmatrix}$$

解：D 中的第三行已有一个零，现根据行列式的性质 4，尽可能多地把第三行的其他元素也化为零，即把第 4 列的 2 倍加到第 1 列，再把第 3 列加到第 4 列，使第三行仅有一个元素不为零，即

$$D=\begin{vmatrix}7 & 1 & -1 & 1\\ -13 & 1 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -5 & -5 & 3 & 0\end{vmatrix}$$

$$=1\times(-1)^{3+3}\times\begin{vmatrix}7&1&1\\-13&1&-1\\-5&-5&0\end{vmatrix}$$

再把第一行加到第二行按第三列展开，得

$$D=\begin{vmatrix}7&1&1\\-6&2&0\\-5&-5&0\end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-6&2\\-5&-5\end{vmatrix}$$

$$=30+10=40$$

例 3　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&0&-1&2\\-2&1&3&1\\0&1&0&-1\\1&3&4&-2\end{vmatrix}$$

解：

$$D=\begin{vmatrix}1&0&-1&2\\-2&1&3&1\\0&1&0&-1\\1&3&4&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&-1&2\\-2&1&3&2\\0&1&0&0\\1&3&4&1\end{vmatrix}$$

$$=1\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&-1&2\\-2&3&2\\1&4&1\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&1&6\\0&5&-1\end{vmatrix}$$

$$= -(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 6 \\ 5 & -1\end{vmatrix} = -(-1-30) = 31$$

例 4 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \cdots\cdots 2 \\ 1 & 3 & 3 \cdots\cdots 3 \\ 1 & 1 & 4 \cdots\cdots 4 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 1 & 1 & 1 \cdots n+1 \end{vmatrix}$$

解：先提出公因子 2，再从第二行到第 n 行都减去第一行，得出三角形行列式，即

$$D_n = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \cdots\cdots 1 \\ 1 & 3 & 3 \cdots\cdots 3 \\ 1 & 1 & 4 \cdots\cdots 4 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 1 & 1 & 1 \cdots n+1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \cdots\cdots 1 \\ 0 & 2 & 2 \cdots\cdots 2 \\ 0 & 0 & 3 \cdots\cdots 3 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots n \end{vmatrix}$$

$$= 2\cdot(1\times 2\times 3\times \cdots\cdots \times n) = 2n!$$

例 5 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & 0 \cdots\cdots 0 & 0 \\ 0 & a & b \cdots\cdots 0 & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots a & b \\ b & 0 & 0 \cdots\cdots 0 & a \end{vmatrix}$$

解：将此行列式按第 1 列展开，得

$$D = a\begin{vmatrix} a & b & 0\cdots 0 & 0 \\ 0 & a & b\cdots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots a & b \\ 0 & 0 & 0\cdots 0 & a \end{vmatrix}_{n-1\text{阶}}$$

$$+(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix} b & 0\cdots 0 & 0 \\ a & b\cdots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0\cdots a & b \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= a\cdot a^{n-1}+(-1)^{n+1}b\cdot b^{n-1}$$

$$= a^n+(-1)^{n+1}b^n.$$

例 6　计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a+x_1 & a & a\cdots\cdots\cdots\cdots a \\ a & a+x_2 & a\cdots\cdots\cdots\cdots a \\ a & a & a+x_3\cdots\cdots\cdots a \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a\cdots\cdots\ a+x_n \end{vmatrix}$$

解：

$$D = \begin{vmatrix} a+x_1 & a & a\cdots\cdots a \\ a & a+x_2 & a\cdots\cdots a \\ a & a & a+x_3\cdots a \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a\cdots\cdots a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a+x_1 & a & a\cdots\cdots 0 \\ a & a+x_2 & a\cdots\cdots 0 \\ a & a & a+x_3\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a\cdots\cdots x_n \end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0\cdots\cdots a \\ 0 & x_2 & 0\cdots\cdots a \\ 0 & 0 & x_3\cdots\cdots a \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots\cdots a \end{vmatrix} + x_n \begin{vmatrix} a+x_1 & a & a\cdots\cdots & a \\ a & a+x_2 & a\cdots\cdots & a \\ a & a & a+x_3\cdots\cdots & a \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a & a & \cdots a\cdots & a+x_{n-1} \end{vmatrix}
$$

这两个行列式中第一个是三角形行列式，第二个是与 D_n 形状相同的行列式，只不过是 $n-1$ 阶，可用 D_{n-1} 表示，所以

$$D_n = a\cdot x_1\cdot x_2\cdots x_{n-1} + x_n\cdot D_{n-1}$$

用同样的方法可得

$$D_{n-1} = a\cdot x_1\cdot x_2\cdots x_{n-2} + x_{n-1}D_{n-2},$$

$$D_{n-2} = a\cdot x_1\cdot x_2\cdots x_{n-3} + x_{n-2}D_{n-3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D_3 = a\cdot x_1\cdot x_2 + x_3D_2^1,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a+x_1 & a \\ a & a+x_2 \end{vmatrix} = ax_1 + ax_2 + x_1x_2$$

故

$$
\begin{aligned}
D_n = {} & ax_1x_2\cdots x_{n-1} + ax_1x_2\cdots x_{n-2}x_n + ax_1x_2\cdots \\
& x_{n-3}x_{n-1}x_n + \cdots + ax_1x_3\cdots x_n + ax_2x_3\cdots \\
& x_n + x_1x_2\cdots x_n \\
= {} & ax_1x_2\cdots x_n\left(\frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_{n-2}} + \cdots \right. \\
& \left. + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{a}\right)
\end{aligned}
$$

本例所得的关系式是

$$D_n = ax_1x_2\cdots\cdots x_{n-1} + x_nD_{n-1}$$

其中 D_{n-1} 是与 D_n 形状相同的 $n-1$ 阶行列式。这种关系式

叫递推关系式，这种方法叫递推法，实际上是归纳法的一种。这种方法在计算元素为文字的n阶行列式时经常用到。

例如：当$n=4$时

$$D_4=\begin{vmatrix} a+x_1 & a & a & a \\ a & a+x_2 & a & a \\ a & a & a+x_3 & a \\ a & a & a & a+x_4 \end{vmatrix}=ax_1x_2x_3+x_4D_3$$

而 $D_3=ax_1x_2+x_3D_2$, $D_2=ax_1+ax_2+x_1x_2$,

所以

$$\begin{aligned} D_4 &= ax_1x_2x_3+x_4[ax_1x_2+x_3(ax_1+ax_2+x_1x_2)] \\ &= ax_1x_2x_3+x_4[ax_1x_2+ax_1x_3 \\ &\qquad +ax_2x_3+x_1x_2x_3] \\ &= ax_1x_2x_3+ax_1x_2x_4+ax_1x_3x_4 \\ &\qquad +ax_2x_3x_4+x_1x_2x_3x_4 \\ &= ax_1x_2x_3x_4\left(\frac{1}{x_4}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{a}\right), \end{aligned}$$

当$n=10$时，可直接写出它的展开式，即

$$D_{10}=ax_1x_2\cdots\cdots x_{10}\left(\frac{1}{x_{10}}+\frac{1}{x_9}+\cdots+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{a}\right)$$

例 7 证明：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1<j<i<n}(a_i-a_j)$$

这个行列式称为范德蒙行列式，它等于 a_1，a_2，$\cdots a_n$ 这 n 个数的所有可能的差，$a_i - a_j$ $(1 \leqslant j < i \leqslant n)$ 的乘积。

证明：用归纳法。

当 $n=2$ 时，

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1 = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant 2} (a_i - a_j)$$

当 $n=3$ 时，

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}$$

从第3行减去第2行的 a_1 倍，从第二行减去第1行的 a_1 倍，得

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1a_2 & a_3^2 - a_1a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ a_2^2 - a_1a_2 & a_3^2 - a_1a_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)\ (a_3 - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$$

$$= \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant 3} (a_i - a_j)$$

这说明用这种方法可证明当 $n=2$，$n=3$，$\cdots$直到 $n-1$ 时都成立，现在证明对 D_n 也成立。

从 D_n 中的第 n 行减去第 $n-1$ 行的 a_1 倍，从 $n-1$ 行减去 $n-2$ 行的 a_1 倍，依次从下一行中减去上一行的 a_1 倍，一直

到从第 2 行减去第一行的 a_1 倍，得

$$Dn=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 1 \\ O & a_2-a_1 & a_3-a_1\cdots\cdots\cdots\cdots a_n-a_1 \\ O & a_2^2-a_1a_2 & a_3^2-a_1a_3\cdots\cdots\cdots\cdots a_n^2-a_1a_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ O & a_2^{n-1}-a_1\,a_2^{n-2} & a_3^{n-1}-a_1\,a_3^{n-2}\cdots a_n^{n-1}-a_1\,a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_3-a_1\cdots\cdots a_n-a_1 \\ a_2^2-a_1a_2 & a_3^2-a_1a_3\cdots\cdots a_n^2-a_1a_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_2^{n-1}-a_1a_2^{n-2} & a_3^{n-1}-a_1\,a_3^{n-2}\cdots\cdots a_n^{n-1}-a_1\,a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

从第 1 列到第 n 列分别提出公因子

a_2-a_1，a_3-a_1，$\cdots\cdots a_n-a_1$ 得

$$D_n=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots\cdots(a_n-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\cdots\cdots 1 \\ a_2 & a_3 & a_4\cdots\cdots a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & a_4^2\cdots\cdots a_n^2 \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & a_4^{n-2}\cdots a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

提出公因子后的行列式，是一个 $n-1$ 阶的范德蒙形状的行列式，按上面的方法，从最后一行减去上一行的 a_2 倍，依次减下去，一直到从第二行中减去第 1 行的 a_2 倍，再提出公因子可得

$$D_{n-1}=(a_3-a_2)(a_4-a_2)\cdots(a_n-a_2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\cdots\cdots 1 \\ a_3 & a_4 & a_5\cdots a_n \\ a_3^2 & a_4^2 & a_5^2\cdots a_n^2 \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_3^{n-3} & a_4^{n-3} & a_5^{n-3}\cdots a_n^{n-3} \end{vmatrix}$$

这又出现了一个 $n-2$ 阶的范德蒙形状的行列式，这样继续作下去．可得

$$D_n=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\cdot D_n-1,$$

$$D_{n-1}=(a_3-a_2)(a_4-a_2)\cdots(a_n-a_2)\cdot D_{n-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D_{n-(n+3)}=(a_{n-1}-a_{n-2})(a_n-a_{n-2})D_{n-(n+2)}$$

$$D_{n-(n+2)}=a_n-a_{n-1}.$$

则

$$D_n=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_2)$$
$$\cdots(a_n-a_2)\cdots(a_{n-1}-a_{n-2})(a_n-a_{n-2})(a_n-a_{n-1})$$

$$=\sum_{1<j<i<n}(a_i-a_j).$$

例 8　证明：

$$a_n=\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(a_i-x)\left[1+x\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i-x}\right]$$

其中 $a_i\neq x(i=1,2,\cdots,n)$

为便于变换，使行列式 D_n 变为 D_{n+1}，但保持 $D_n=D_{n+1}$ 即

$$D_n = D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & x & \cdots & x \\ 0 & x & a_2 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}_{(n+1)}.$$

从第 2，3…$n+1$ 行中分别减去 1 行的 x 倍．得

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -x & a_1-x & 0 & \cdots & 0 \\ -x & 0 & a_2-x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -x & 0 & 0 & \cdots & a_n-x \end{vmatrix}$$

从各列提出公因子．得

$$x(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)\begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{a_1-x} & \frac{1}{a_2-x} & \cdots & \frac{1}{a_n-x} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

从第 2 列开始，每列都加到第 1 列上，得

$$x\prod_{i=1}^{n}(a_i-x)\begin{vmatrix} \frac{1}{x}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(a_i-x)} & \frac{1}{a_1-x} & \frac{1}{a_2-x} & \cdots & \frac{1}{a_n-x} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

按第1列展开。得

$$D_n = x\prod_{i=1}^{n}(a_i - x)\left[\frac{1}{x} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(a_i - x)}\right]$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(a_i - x)\left[1 + x\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(a_i - x)}\right]$$

练　习　六

1．计算行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix}$,

(2) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$

2．证明：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \cdots n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \cdots n-1 & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots n-1 & 2n-1 \end{vmatrix} = (n-1)!,$$

2. 证明：

$$\begin{vmatrix} a+x_1 & a & a & \cdots & a & a \\ a & a+x_2 & a & \cdots & a & a \\ a & a & a+x_3 & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & a+x_n & a \\ a & a & a & \cdots & a & a \end{vmatrix} = ax_1x_2\cdots x_n.$$

第七节　拉普拉斯定理

我们已经掌握了将行列式按某一行（列）展开的方法，现在将这一方法进行推广，研究将行列式按某几行（列）展开．为此，先把余子式和代数余子式的概念加以推广．

定义 1　在一个 n 阶行列式 D 中，任意选定 K 行 K 列（$K \leqslant n-1$），位于 K 行 K 列交点上的 K^2 个元素，按原来的顺序组成一个 K 阶行列式 M，称 M 为行列式 D 的一个 K 阶子式；在 D 中划去 K 行 K 列后，余下的元素按原来的顺序组成的 $n-k$ 阶行列式 M'，称为 K 阶子式 M 的余子式．

从定义中可以看出，M 也是 M' 的余子式，所以 M 与 M' 在 D 中互为余子式．

例 1　在四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

中取一、三两行，二、四两列，得到一个二阶子式M和它的余子式M'.

$$M=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad M'=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

例 2　在五阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix},$$

$$M=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{42} & a_{43} & a_{45} \end{vmatrix}, \qquad M'=\begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{51} & a_{54} \end{vmatrix}$$

M与M'是一对互余的子式。

定义 2　设D的K阶子式M在D中所在的行、列分别为$i_1,i_2,\cdots i_k$；$j_1,j_2,\cdots j_k$。则M的余子式M'前面加上符号$(-1)^{(i_1+i_2+\cdots\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots\cdots+j_k)}$后，称为$M$的代数余子式，记为$A$。

例如：在本节例 1 中，子式M的代数余子式A是$(-1)^{(i_1+i_2)+(j_1+j_2)}M'$，其中$i_1=1$，$i_2=3$，$j_1=2$，$j_4=4$，即

$$A=(-1)^{(1+3)+(2+4)}M'=(-1)^{10}M'$$

$$=M'=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

在本节例 2 中子式M的代数余子式A为

$(-1)^{(i_1+i_2+i_3)+(j_1+j_2+j_3)}M'$，其中 $i_1=1$，$i_2=2$，$i_3=4$，$j_1=2$，$j_2=3$，$j_3=5$ 即

$$A=(-1)^{(1+2+4)+(2+3+5)}M'=(-1)^{17}M'$$

$$=-M'=-\begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{51} & a_{54} \end{vmatrix}$$

有了子式和代数余子式的定义后，我们可以把行列式按某几行或某几列展开，亦即拉普拉斯定理。

拉普拉斯定理：设在行列式 D 中任意取定了 $K(1\leqslant K\leqslant n-1)$ 个行，由这 K 个行元素所组成的一切 K 阶子式与它们的代数余子式的乘积之和等于行列式 D。

这个定理又常常说成行列式按某 K 个行展开（按某一行展开的推广）。如果把行换成列，又可以说成行列式按某 K 个列展开（按某一列展开的推广）。证明的思想方法虽然完全与按某一行（或某一列）展开的方法相同，但作起来相当麻烦，故证明从略，仅举例说明。

例 3 在行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

中取一、二、两行，由这两行的元素可组成六个子式，即

$$M_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \qquad M_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix},$$

$$M_3=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$M_4=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix},\qquad M_5=\begin{vmatrix}2 & 4\\ -1 & 1\end{vmatrix}$$

$M_6=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 1\end{vmatrix}$ 这六个子式对应的余子式分别为

$$M_1'=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix},\qquad M_2'=\begin{vmatrix}0 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix},$$

$$M_3'=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix},$$

$$M_4'=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix},\qquad M_5'=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix},$$

$$M_6'=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}$$

这六个子式对应的代数余子式为

$$A_1=(-1)^{(1+2)+(1+2)}M_1'=M_1',$$

$$A_3=(-1)^{(1+2)+(1+3)}M_2'=-M_2',$$

$$A_3=(-1)^{(1+2)+(1+4)}M_3'=M_3',$$

$$A_4=(-1)^{(1+2)+(2+3)}M_4'=M_4'$$

$$A_5=(-1)^{(1+2)+(2+4)}M_5'=-M_5'$$

$$A_6=(-1)^{(1+2)+(3+4)}M_6'=M_6'$$

根据拉普拉斯定理把D展开，得

$$D=M_1A_1+M_2A_2+M_3A_3+M_4A_4+M_5A_5+M_6A_6$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}1&4\\0&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0&1\\1&3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&1\\-1&2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&3\\0&1\end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix}2&4\\-1&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\0&3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&4\\2&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)\times(-8)-2(-3)+1\times(-1)+5\times1$$
$$-6\times3+(-7)\times1=8+6-1+5-18-7=-7$$

例 4 计算 $2n$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}&a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}&a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\\ b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}&0&0&\cdots&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nn}&0&0&\cdots&0\end{vmatrix}$$

其中后 n 行 n 列相交处的元素都是零。

解：把 D 按后 n 行展开，因为后 n 行中所含的 n 阶子式除左下角一个外，其余的都等于零，于是 D 就等于这个子式与它的代数余子式的乘积，即

$$M=\begin{vmatrix}b_{11}b_{12}\cdots\cdots b_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ b_{n1}b_{n2}\cdots\cdots b_{nn}\end{vmatrix},\qquad M'=\begin{vmatrix}a_{11}\ a_{12}\cdots\cdots\ a_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}\ a_{n2}\cdots\cdots\ a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$A=(-1)^{(n+1+n+2+\cdots+n+n)+(1+2+\cdots+n)}M'$$
$$=(-1)^{2(1+2+\cdots+n)+nn}M'$$
$$=(-1)^{n(1+n)+nn}M'.$$

$$D = MA = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{n(1+n)+nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+2n^2} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots\cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots\cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

当 n 为偶数时取正号，当 n 为奇数时取负号。

练　习　七

1．将行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

按前两行展开，并求其值。

2．计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}5&6&0&0&0\\1&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&6\\0&0&0&1&5\end{vmatrix}.$$

3. 用拉普拉斯定理计算

$$(1)\quad D=\begin{vmatrix}1&1&0&0&1&0\\1&\omega&0&0&\omega^2&0\\a_1&b_1&1&1&c_1&1\\a_2&b_2&1&\omega^2&c_2&\omega\\a_3&b_3&1&\omega&c_3&\omega^2\\1&\omega^2&0&0&\omega&0\end{vmatrix}.$$

（提示：取 1,2,6 行和 1,2,5 列交点的元素为M）

$$(2)\quad \begin{vmatrix}a&&&&&b\\&\ddots&&&\iddots&\\&&a&b&&\\&&b&a&&\\&\iddots&&&\ddots&\\b&&&&&a\end{vmatrix}\begin{matrix}\}n\text{行}\\ \\ \}n\text{行}\end{matrix}$$

提示：取 1,2n 两行和 1,2n 两列交点上的元素为M，

$$D=(-1)^{(1+2n)+(1+2n)}\begin{vmatrix}a&b\\b&a\end{vmatrix}\cdot$$

$$\begin{vmatrix}a&&&&&b\\&\ddots&&&\iddots&\\&&a&b&&\\&&b&a&&\\&\iddots&&&\ddots&\\b&&&&&a\end{vmatrix}\begin{matrix}\}n-1\\ \\ \}n-1\end{matrix}$$

$$
=(a^2-b^2)\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & ⋰ & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & ⋰ & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}\begin{matrix} \left.\right\} n-1 \\ \\ \left.\right\} n-1 \end{matrix}
$$

$$
=(a^2-b^2)^2\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & ⋰ & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & ⋰ & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}\begin{matrix} \left.\right\} n-2 \\ \\ \left.\right\} n-2 \end{matrix}
$$

…………………………

$$
=(a^2-b^2)^{n-1}\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}=(a^2-b^2)^n.
$$

第八节　行列式的乘法定理

根据拉普拉斯定理，我们可以研究两个 n 阶行列式相乘的法则。

行列式的乘法法则：

两个 n 阶行列式

$$
D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

和

$$D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

的乘积等于一个 n 阶行列式 C。

$$C=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

其中 C_{ij} 是 D_1 中第 i 行的元素 $a_{i1}a_{i2}\cdots a_{in}(i=1,2,\cdots n)$ 和 D_2 中第 j 列的元素 $b_{1j}b_{2j}\cdots b_{nj}(j=1,2,\cdots n)$ 对应相乘积之和。即

$$C_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$
$$(i,j=1,2,\cdots n)$$

例如 C 中的元素 C_{12}，就是 D_1 中的第一行的元素 $a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}$ 与 D_2 中的第二列的元素 $b_{12}b_{22}b_{32}\cdots b_{n2}$ 对应相乘积之和，即

$$C_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}+\cdots a_{1n}b_{n2}.$$

这一法则的证明是相当麻烦的，因此从略，仅举例说明，使之掌握法则的具体运用。

例 1　两个三阶行列式 A、B，其乘积 $C=A\cdot B$，表示 C 中的所有元素。

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$B=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix},$$

$$C=AB=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

其中

$$C_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31},$$
$$C_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32},$$
$$C_{21}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$C_{33}=a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33},$$

一般用 C_{ij} 表示，可写成

$C_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}$ $(i,j=1,2,3)$ 如果用连加号表示也可写成

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}b_{kj}\quad(i,j=1,2,3)$$

例 2　已知两个行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix},\qquad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

求 $D=D_1\cdot D_2$ 的值。

解：先按行列式乘法规则计算，然后分别计算出 D_1D_2 的值，进行验证。

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 3\\ 1 & 4 & -1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1\times1+2\times2+0\times1 & 1\times0+2\times(-1)+0\times(-1) & 1\times1+2\times0+0\times2\\ 0\times1+(-1)\times2+3\times1 & 0\times0+(-1)\times(-1)+3\times(-1) & 0\times1+(-1)\times0+3\times2\\ 1\times1+4\times2+(-1)\times1 & 1\times0+4\times(-1)+(-1)\times(-1) & 1\times1+4\times0+(-1)\times2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}5 & -2 & 1\\ 1 & -2 & 6\\ 8 & -3 & -1\end{vmatrix}=15$$

验证：

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 3\\ 1 & 4 & -1\end{vmatrix}=-5,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=-3,\qquad D=15$$

从上面的计算中可以看出，用乘法法则计算行列式的相乘是很麻烦的，甚至不如分别将两个行列式的值先计算出来再相乘，其所以在这里讲行列式的乘法法则，主要是为第二

章中讲矩阵的乘法打下基础。

练　习　八

1. 设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix},$$

$$C=D_1D_2=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix}$$

求 c_{12}，c_{23}，c_{34}，c_{44}。

第九节　克莱姆法则

前几节介绍了行列式的来源、性质及其计算，是从行列式的产生讲到行列式理论的发展，本节是对行列式理论的应用，用 n 阶行列式解 n 元线性方程组．即所谓克莱姆法则．

1. 用克莱姆法则解 n 元线性方程组：

设 n 元线性方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
\qquad (1)
$$

这个 n 元线性方程组未知数的系数所排成的 n 阶行列式是：

$$
D = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

我们要证明当 $D \neq 0$ 时，(1)式有唯一的解，其解可以用 n 阶行列式表示，并且求解的方法与求二元和三元线性方程组的解的方法类同。为便于证明，我们可先令

$$
D_1 = \begin{vmatrix}
b_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
b_2 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
b_n & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix},
$$

$$
D_2 = \begin{vmatrix}
a_{11} & b_1 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & b_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & b_n & a_{n3} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix},
$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$
D_n = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & b_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & b_n
\end{vmatrix}
$$

上面的行列式$D_i(i=1,2,\cdots,n)$与D，除第i列外均相同，且D_i的第i列的所有元素恰好是(1)式中所有的常数项，因之，若仍以A_{ij}表示D中a_{ij}的代数余子式$(i,j=1,2,\cdots n)$，则D_1，$D_2\cdots D_n$分别按第1，2，$\cdots n$列展开，得

$$\begin{cases} D_1=b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1}, \\ D_2=b_1A_{12}+b_2A_{22}+\cdots+b_nA_{n2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ D_n=b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\cdots+b_nA_{nn} \end{cases} \tag{2}$$

而对D按第i列展开，得

$$D=a_{1i}A_{1i}+a_{2i}A_{2i}+\cdots+a_{ni}A_{ni}, \quad (i=1,2,\cdots n) \tag{3}$$

在求二元和三元线性方程组的解时曾用消元法分别得出它们的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \qquad x_2=\frac{D_2}{D};$$

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \qquad x_2=\frac{D_2}{D},$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}$$

对n元线性方程组的解也可用消元法来求解，现在根据(2)式和(3)式来证明(1)式的解为

$$(D\neq 0)$$

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \qquad x_2=\frac{D_2}{D}, \qquad \cdots x_n=\frac{D_n}{D}$$

而且(1)式只有这一组解。

先把(2)式和(3)式中的代数余子式都看成是计算出来的具体数，然后想法用这些“数”通过消元法消去(1)式中的x_2，x_3，$\cdots x_n$这$n-1$个未知数。根据行列式的某一行(列)的元素乘另一行(列)元素对应的代数余子式其乘积之和为零的道理，我们用A_{11}，A_{21}，$\cdots$，A_{n1}依次分别去乘(1)式中的1，2，3$\cdots n$各式，得

$$a_{11}A_{11}x_1+a_{12}A_{11}x_2+\cdots+a_{1n}A_{11}x_n=b_1A_{11},$$

$$a_{21}A_{21}x_1+a_{22}A_{21}x_2+\cdots+a_{2n}A_{21}x_n=b_2A_{21},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n1}A_{n1}x_1+a_{n2}A_{n1}x_2+\cdots+a_{nn}A_{n1}x_n=b_nA_{n1}$$

将这n个等式相加，在所得等式的左边除x_1的系数不为零外，其余的未知数x_2，x_3，$\cdots x_n$的系数全为零，这样就消去了x_2，x_3，$\cdots x_n$各项。得

$$a_{11}A_{11}x_1+a_{21}A_{21}x_1+\cdots+a_{n1}A_{n1}x_1$$

$$=b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1},$$

$$=(a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1})x_1$$

$$=b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1}$$

等式左边x_1的系数$a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}$就是(1)式中未知数的系数组成的行列式$D$的展开式，等式右边就是行列式$D$的第1列的元素换成常数项$b_1$，$b_2$，$\cdots b_n$的展开式$D_1$，因为$D\neq0$所以有

$$Dx_1=D_1,\quad x_1=\frac{D_1}{D}$$

再用A_{12}，A_{22}，$\cdots A_{n2}$依次分别去乘(1)式中的1，2，$\cdots n$各式，得

$$a_{11}A_{12}x_1+a_{12}A_{12}x_2+\cdots+a_{1n}A_{12}x_n=b_1A_{12},$$

$$a_{21}A_{22}x_1+a_{22}A_{22}x_2+\cdots+a_{2n}A_{22}x_n=b_2A_{22},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n1}A_{n2}x_1+a_{n2}A_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}A_{n2}x_n=b_nA_{n2}$$

将这 n 个等式相加，在所得等式的左边除 x_2 的系数不为零外，其余未知数的系数都为零，提出公因数 x_2，得

$$(a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+\cdots+a_{n2}A_{n2})x_2$$

$$=b_1A_{12}+b_2A_{22}+\cdots+b_nA_{n2}$$

左边 x_2 的系数是(1)式中未知数的系数组成的行列式 D 的展开式，右边是行列式 D 的第 2 列的元素依次换成常数 b_1 $b_2\cdots b_n$ 组成的行列式 D_2 的展开式，所以有

$$Dx_2=D_2,\qquad x_2=\frac{D_2}{D}$$

再用 A_{13}，A_{23}，$A_{33}\cdots A_{n3}$ 分别依次乘(1)式中的 1,2,$\cdots n$ 各式，用求 x_1，x_2 同样的方法，可求出

$$x_3=\frac{D_3}{D},$$

再用 $A_{14},A_{24},\cdots A_{n4}$，到 $A_{1n},A_{2n}\cdots A_{nn}$ 都依次分别去乘(1)式中的 $1,2\cdots n$ 各式，与求 x_1，x_2，x_3 的方法相同，可求出

$$x_4=\frac{D_4}{D},\qquad x_5=\frac{D_5}{D},\quad \cdots x_n=\frac{D_n}{D}$$

总之：求 $D_{xi}=D_i(i=1,2,\cdots n)$ 的方法是用 $A_{1i},A_{2i}\cdots A_{ni}$ 依次分别乘(1)式中的 $1,2,\cdots n$ 各式，然后把所得的 n 个等式相加，便可得出

$$D_{xi}=D_i\quad(i=1,2,\cdots n)$$

这样就把线性方程组(1)转化为新的方程组

$$
\begin{cases}
Dx_1 = D_1, \\
Dx_2 = D_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Dx_n = D_n
\end{cases} \tag{4}
$$

因为(4)式是从(1)式中通过加减消元法得来的，所以(1)式若有解，则其解必然满足(4)式，但能满足(4)式的解只有

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots x_n = \frac{D_n}{D} (D \neq 0)$$

故(1)式若有解，则其解只能是上面这一组数，这便证明了在$D \neq 0$时，n元线性方程组(1)的解只能有一组，即解是唯一的。至于上面解的这组数是不是(1)的解呢？也就是解的对不对呢？这只有代入(1)式进行验证。

例如，将$x_1, x_2, \cdots x_n$的解代入(1)式中的第1式，得

$$
\begin{aligned}
& a_{11}\frac{D_1}{D} + a_{12}\frac{D_2}{D} + \cdots + a_{1n}\frac{D_n}{D} \\
& = \frac{1}{D}(a_{11}D_1 + a_{12}D_2 + \cdots + a_{1n}D_n) \\
& = \frac{1}{D}[a_{11}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}) \\
& \quad + a_{12}(b_1A_{12} + b_2A_{22} + \cdots + b_nA_{n2}) \\
& \quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \quad + a_n(b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \cdots + b_nA_{nn})] \\
& = \frac{1}{D}[b_1(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n})
\end{aligned}
$$

$$+ b_2(a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \cdots + a_{1n}A_{2n})$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ b_n(a_{11}A_{n1} + a_{12}A_{n2} + \cdots + a_{1n}A_{nn})]$$

$$= \frac{1}{D}[b_1(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n})$$

$$+ b_2 \cdot 0 + \cdots + b_n \cdot 0]$$

$$= \frac{1}{D} b_1 D = b_1.$$

这说明上面那组解代入(1)式中的第1式是适合的．用同样的方法将上面那组解分别代入(1)式中的第2式，第3式…第n式，皆可得到验证解是正确的，所以当$D \neq 0$时

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots x_n = \frac{D_n}{D}$$

就是线性方程组(1)的唯一解．

以上求n元线性方程组的解的方法就是克莱姆法则的证明，克莱姆法则可简述为

当n元线性方程组(1)的系数行列式$D \neq 0$时，此方程组有而且只有一个解，即

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中D_i是把D中第i列（x_i的系数）换成常数项而成．

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

例1　解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 \qquad\quad - 6x_4 = 9, \\ \qquad 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

解：先求出D(系数行列式)，看是否为零，如果$D\neq 0$，则可利用克莱姆法则解之。

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1 & -5 & 1\\ 1 & -3 & 0 & -6\\ 0 & 2 & -1 & 2\\ 1 & 4 & -7 & 6\end{vmatrix}=27\neq 0$$

故可利用克莱姆法则求解。

$$D_1=\begin{vmatrix}8 & 1 & -5 & 1\\ 9 & -3 & 0 & -6\\ -5 & 2 & -1 & 5\\ 0 & 4 & -7 & 6\end{vmatrix}=81$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & 8 & -5 & 1\\ 1 & 9 & 0 & -6\\ 0 & -5 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -7 & 6\end{vmatrix}=-108,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2 & 1 & 8 & 1\\ 1 & -3 & 9 & -6\\ 0 & 2 & -5 & 2\\ 1 & 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=-27,$$

$$D_4=\begin{vmatrix}2 & 1 & -5 & 8\\ 1 & -3 & 0 & 9\\ 0 & 2 & -1 & -5\\ 1 & 4 & -7 & 0\end{vmatrix}=27,$$

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{81}{27}=3,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-108}{27}=-4,$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-27}{27}=-1,\quad x_4=\frac{27}{27}=1$$

2．齐次线性方程组的解

我们前面讲的用克莱姆法则解 n 元线性方程组，只能当系数行列式 $D\neq 0$ 时才适用．但在线性方程组中，有一种特殊的线性方程组，它的常数项全为零，这样的方程组称为齐次线性方程组．如：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}$$

显然，齐次线性方程组总是有解的，因为

$x_i=0$ $(i=1,2,\cdots n)$ 即 $x_1=0,x_2=0,\cdots$

$x_n=0$ 就是它的一组解，这组解称为零解，所以对于齐次线性方程组来说，需要讨论的问题不是有没有解，而是有没有非零解，这与方程组解的个数有密切关系，将在第四章中讲无穷多解时再讲，这里只讲 n 个未知数，n 个线性方程的齐次线性方程组．如果它只有零解，那么这个方程组就有唯一解．反之，如果某个齐次线性方程组有唯一解，而由于零解是一组解，所以这个齐次线性方程组不可能有非零解．

对于方程的个数和未知数的个数相同的齐次线性方程组(5)应用克莱姆法则有

定理：如果齐次线性方程组(5)的系数行列式 $D\neq 0$，那么(5)式只有零解；或者说如果方程组(5)有非零解，则必须有 $D=0$．

证明：由于$D\neq 0$，则可用克莱姆法则解之，因为行列式$D_i(i=1,2,\cdots n)$的第i列的元素全为零，所以$D_i=0$，于是方程组的唯一解是

$$x_i=\frac{D_i}{D}=0\quad(i=1,2,\cdots n)$$

关于齐次线性方程组非零解的问题将在第四章中详细论述，这里就不多讲了。

练　习　九

用克莱姆法则解下列方程组：

1. $$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+3x_4=2,\\2x_1-x_2+3x_3-2x_4=7,\\3x_2-x_3+x_4=6,\\x_1-x_2+x_3+4x_4=-4,\end{cases}$$

2. $$\begin{cases}3x_1+2x_2+4x_3-x_4=13,\\5x_1+x_2-x_3+2x_4=9,\\2x_1+3x_2-7x_3+3x_4=14,\\4x_1-4x_2+3x_3-5x_4=4.\end{cases}$$

3. $$\begin{cases}5x_1+6x_2=1,\\x_1+5x_2+6x_3=-2,\\x_2+5x_3+6x_4=2,\\x_3+5x_4+6x_5=-2,\\x_4+5x_5=-4,\end{cases}$$

4. $\begin{cases} ax_1+bx_2+3x_4+5x_5=0, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=0, \\ cx_1+mx_2+bx_3+ax_4=0, \\ 5x_1+6x_2+13x_3+7x_5=0, \\ 3x_1+4x_4=0. \end{cases}$ （且 a,b,c，均不为 0）

本 章 提 要

1. n 阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}a_{i_nn}$$

2. 行列式的性质

性质 1. 如果把行列式的某一行所有元素同乘以 k，其结果等于用 k 乘原行列式. 或者说行列式中的某一行所有各数如有公因子 k，则可把 k 提到公因子的外面. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} \cdots\cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
= k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots\cdots a_{in} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}
$$

性质 2　如果行列式的某行所有的数均可写成两项的和，则这个行列式等于两个行列式的和。

性质 3　交换行列式中的任意两行，行列式只改变符号。

推论 1　行列式中如有两行完全相同。则这个行列式等于零。

推论 2　行列式中如有两行成比例，则这个行列式等于零。

性质 4　如果把行列式某一行中的各元素同乘以 k 后，加到另一行对应的元素上，则这个行列式不变。

性质 5　行列式与它的转置行列式相等，即行列式的行与列交换，行列式不变。

根据性质 5 可知，行列式对行的所有性质也适用于列，以后在计算中可把这些性质直接用于列。

3．行列式按某一行展开。

（1）余子式：在 n 阶行列式中，划去元素 a_{ij} 所在的 i 行和 j 列的所有元素，剩下的元素按原来的排列构成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}。

（2）代数余子式：前面带有正负号的余子式称代数余子式，用 A_{ij} 表示。

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}。$$

(3) 行列式按行计算有公式

$$\sum_{s=1}^{n} a_{ks}A_{is}=\begin{cases} D & 当 k=i \\ O & 当 k\neq i \end{cases}$$

(4) 行列式按某一列的展开式

$$\sum_{s=1}^{n} a_{sk}A_{sj}=\begin{cases} D & 当 k=j \\ O & 当 k\neq j \end{cases}$$

4. 拉普拉斯定理

(1) k 阶子式：在一个 n 阶行列式 D 中，任意选定 k 行 k 列($k\leqslant n-1$)，位于这些 k 行 k 列交点上的 k^2 个元素，按原来的排列构成的 k 阶行列式 M，称为行列式 D 的一个 k 阶子式.

(2) k 阶子式的余子式：在行列式 D 中划去 k 行 k 列后余下的元素按原来的排列构成的行列式 M'，称为 k 阶子式的余子式.

(3) k 阶子式的代数余子式：k 阶子式的余子式 M' 前面带有正负号，称 k 阶子式的代数余子式. 一般用 A 表示.

$$A=(-1)^{P+Q}M'$$

P 是 K 个行中每行的行序数之和，Q 是 K 个列中每列所在的列序数之和.

(4) 拉普拉斯定理

设在行列式 D 中，任意取定了 K 个行 ($1\leqslant k\leqslant n-1$)，由这 K 行元素所组成的一切 K 阶子式与它们的代数余子式的乘积之和等于行列式 D.

5. 行列式的乘法法则

两个 n 阶行列式 D_1 和 D_2 的乘积，等于一个 n 阶行列式

C，其中 c_{ij} 是 D_1 的第 i 行的元素与 D_2 的第 j 列的元素对应相乘积之和。(D_1 和 D_2 必须是两个同阶的行列式，否则不能相乘)。

6．克莱姆法则

如果线性方程组的系数行列式 $D\neq 0$，则这个方程组有解，并且解是唯一的，表示为

$$x=\frac{D_i}{D}\quad(i=1,2,\cdots n)$$

其中 D_i 是把 D 中的第 i 列（即 x_i 的系数）的元素换成常数 $b_i(i=1,2,\cdots n)$。所构成的行列式。

7．行列式的计算是一个重要问题．一个有效的计算方法就是：先利用行列式的性质把行列式的某行（或列）化出足够多的零，然后再将行列式按该行（或列）展开。

习　题

1．计算以下各排列的逆序数：

(1) 1，3，4，7，8，2，6，9，5．

(2) 2，1，7，9，8，6，3，5，4．

(3) 9，8，7，6，5，4，3，2，1．

2．试选取 i 及 k，使

(1) 1，2，7，4，i，5，6，k，9　成偶排列．

(2) 1，i，2，5，k，4，8，9，7　成奇排列．

3．设排列 i_1，i_2，$\cdots i_n$ 的逆序数为 m，求 i_n，i_{n-1}，$\cdots i_2$，

i_1 的逆序数。并说明二者的奇偶性有何关系？

4．在 6 阶行列式中计算下列各项的符号：

(1) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$，

(2) $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$，

(3) $a_{16}a_{34}a_{43}a_{52}a_{61}a_{25}$。

5．判断下列各乘积是否是 5 阶行列式的代数项（带符号的项）。

(1) $a_{13}a_{24}a_{23}a_{41}a_{55}$，

(2) $+a_{11}a_{23}a_{55}a_{34}a_{42}$，

(3) $-a_{21}a_{12}a_{34}a_{55}a_{43}$。

6．用定义计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

7．用行列式的性质求 4 次多项式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$$

的根。

8．已知 204，527，255 均能被 17 除尽，证明行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

可被 17 除尽。

9. 证明行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix} = 0$$

10. 化简行列式

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$

11. 计算行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

12. 计算行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$

13. 计算以下行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$;

$$(5)\ \begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}$$

14. 计算以下 n 阶行列式：

$$(1)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \cdots 2 \\ 2 & 2 & 2 \cdots 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ 2 & 2 & 3 \cdots 2 \\ 2 & 2 & 2 \cdots n \end{vmatrix};$$

$$(2)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \cdots n \\ n & 1 & 2 \cdots n-1 \\ n-1 & n & 1 \cdots n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ 2 & 3 & 4 \cdots 1 \end{vmatrix};$$

$$(3)\ \begin{vmatrix} a_1 & x & x \cdots x \\ x & a_2 & x \cdots x \\ x & x & a_3 \cdots x \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ x & x & x \cdots a_n \end{vmatrix};$$

(4) $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \cdots a_{n-1} \\ -x & x & 0 \cdots 0 \\ 0 & -x & x \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots x \end{vmatrix}$

15. 用克莱姆法则解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=5 \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2 \\ 2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-2 \\ 3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0 \end{cases}$；

(2) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 = 0 \\ x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ x_1+2x_2+3x_3 = 2 \\ x_2+2x_3+3x_4=-2 \\ x_3+2x_4+3x_5=2 \end{cases}$；

(3) $\begin{cases} -x_1+x_2+x_3+x_4=a \\ x_1-x_2+x_3+x_4=b \\ x_1+x_2-x_3+x_4=c \\ x_1+x_2+x_3-x_4=d \end{cases}$

16. 问 k 取何值时，方程组

$$\begin{cases} kx_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+kx_2-x_3=0 \\ 2x_1-x_2+x_3=0 \end{cases}$$

仅有零解。

第三章 矩 阵

在上一章里我们已经介绍了 n 阶行列式和用行列式解线性方程组的克莱姆法则，但是用克莱姆法则解线性方程组是有条件的；它要求线性方程组方程的个数与未知数的个数相等，而且系数行列式还不能等于零。然而，在很多问题中，我们遇到的线性方程组并不都是这样特殊的，有时方程的个数虽与未知量的个数相等，但系数行列式却等于零；有时甚至连方程的个数与未知量的个数也不等，这时就无系数行列式可言。因此克莱姆法则也就不适用了，这就使我们认识到对解一般的线性方程组，行列式这个工具已经不够用的了，就促使我们来研究新的工具，这就是矩阵的理论，不仅一般线性方程组可用矩阵表示，而且线性方程组的一些重要性质也可以通过它的系数矩阵和增广矩阵的性质来表示，甚至解线性方程组的过程也是通过变换矩阵来进行的，因而矩阵就成为线性代数的一个主要研究对象。

这一章就介绍矩阵概念、运算和一些基本性质。我们所讨论的矩阵都是某个取定的数域 p 上的矩阵，所提到的数也都是同一个数域 p 中的数。

第一节 矩阵的概念

在第二章中曾谈到，行列式是从研究线性方程组中引出

来的，而这种方程组必须是未知数的个数与方程的个数相同，矩阵也是从研究线性方程组中引出来的，但这是一般的线性方程组，即方程的个数和未知数的个数不一定相等，如

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1}$$

其中m与n一般不相等，如把方程组中未知数的系数按原来的相对位置排成一个矩形表，就是一个矩阵。

1．矩阵的定义：如果把mn个数a_{ij}（$i=1$，2，$\cdots m$，$j=1,2,\cdots n$）排成一个矩形表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

叫做m行n列矩阵(或$m\times n$矩阵)。横的各排称为矩阵的行，竖的各排称为矩阵的列，a_{ij}叫做矩阵的第i行第j列的元素。

矩阵通常用大写字母A，B等表示，或记为A_{mn}，B_{mn}等，也可以记为$[a_{ij}]_{mn}$。

矩阵虽然也是从线性方程组引入的，但矩阵和行列式却是完全不同的两个概念，行列式表示的是一个数，而矩阵表示的是一张表，矩阵的应用也不仅限于解线性方程组，它在日常工作中的应用比较广泛，如在物资调运中，经常要研究如何组织产供销的问题，才能使物资的总运费最低。例如：

某种货物有四个产地，三个销地，要在充分调查核实产

量和销量的基础上再进行合理的调度，这就必须组织调配方案，这个方案一般可以用一张表表示：如

吨数 产地 / 销地	x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	1	2	5	4
y_2	2	3	1	0
y_3	4	1	5	2

为了简便，我们可以把用表表示的调配方案用矩阵表示出来。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

2。矩阵与向量

（1）行矩阵、行向量

矩阵 A_{mn}，当 $m=1$ 时，是一个 1 行 n 列的矩阵。

$$A_{1m}=[a_{11}\ \ a_{12}\cdots a_{1n}]$$

这个矩阵称为行矩阵，也叫行向量，如

$$B_{14}=[\,3\ \ 0\ \ 2\ \ 5\,]$$

（2）列矩阵、列向量

矩阵 A_{mn}，当 $n=1$ 时，是一个 m 行 1 列的矩阵。如

$$A_{m\cdot 1}=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

这个矩阵称为列矩阵，也叫列向量．如

$$B_{4\cdot 1}=\begin{bmatrix}3\\2\\1\\4\end{bmatrix}$$

向量是既有大小又有方向的量．如力、速度、加速度和平面上的有向线段等都是向量．

（3）方阵

矩阵 A_{mn}，当 $m=n$ 时，称矩阵 A 为方阵．如

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1 & 4 & 5\\ 0 & 3 & 4 & 2 & 6\\ a & b & 0 & 5 & 3\\ 4 & 7 & 8 & 9 & 2\\ c & e & 0 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

3．几种特殊的矩阵

（1）零阵：当一个矩阵的元素 a_{ij} 全部为零时，这个矩阵叫做零矩阵．如

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

记作〔0〕或 0。

（2）对角矩阵：一个 n 阶方阵，除主对角线上的元素外，其余的元素全部为零，这样的矩阵叫做对角矩阵。如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

（3）单位矩阵：在 n 阶方阵中主对角线上的元素全为 1，其余的元素全为零，叫做单位矩阵。如

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

记作 E。

4. 负矩阵：把矩阵 A_{mn} 中每个元素 a_{ij} 都变成 $-a_{ij}$，所得的矩阵 $-A_{mn}$ 称 A_{mn} 的负矩阵。

如：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

的负矩阵是

$$-A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}$$

5．相等的矩阵：设两个矩阵 A_{mn} 和 B_{mn}，当 A 中的元素 a_{ij} 与 B 中的元素 b_{ij} 对应相等，（$i=1,2,\cdots m$；$j=1,2,\cdots n$），则称矩阵 A 等于矩阵 B．如：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

当 $a_{11}=b_{11}$，$a_{12}=b_{12}\cdots a_{mn}=b_{mn}$．即

$$a_{ij}=b_{ij} \qquad (i=1,2,\cdots m,\ j=1,2,\cdots n)$$

时，称 $A=B$

练　习　一

1．举例说明矩阵与行列式有何不同．

2．什么是向量？举例说明．

3．什么是单位矩阵、负矩阵、对角矩阵、相等矩阵？各举一例．

第二节　矩阵的加法

1．矩阵加法的定义

设矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

都是 $m\times n$ 阶矩阵，把 A 和 B 中的对应元素相加，所得的 $m\times n$ 矩阵 C，

$$C=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\cdots a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\cdots a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}+b_{m2} & a_{m2}+b_{m2}\cdots a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 A 与 B 之和，记为

$$C=A+B.$$

从定义中可以看出，两个矩阵只有在行数与列数分别相同的情况下才能相加(减)。

例 1 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1+2 & -2+(-1) & 3+(-2) \\ 2+1 & 0+2 & 1+0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & -3 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

例 2 设

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 3 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\\ 2 & 1\\ 4 & 5\end{bmatrix},$$

$$A+B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 3 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\\ 2 & 1\\ 4 & 5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+0 & 2+0\\ 0+1 & 1+2\\ 3+2 & 1+1\\ 2+4 & 1+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\\ 5 & 2\\ 6 & 6\end{bmatrix}$$

2. 矩阵加法的运算律

（1）交换律：$A+B=B+A$；

（2）结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$；

（3）任何矩阵加零矩阵不变；

$$A+0=0+A=A \qquad (A_{mn},\ 0_{mn})$$

（4）任何矩阵加它的负矩阵等于 0 矩阵。

$$A+(-A)=0$$

例 3 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 5\\ -1 & 0 & 6\\ 3 & 2 & -6\end{bmatrix},\quad -\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & -3 & -5\\ 1 & 0 & -6\\ -3 & -2 & 6\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}2+(-2) & 3+(-3) & 5+(-5)\\ (-1)+1 & 0+0 & 6+(-6)\\ 3+(-3) & 2+(-2) & (-6)+6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=0$$

（5）两个行、列数分别相等的矩阵可以相减

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdots a_{mn}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\cdots\cdots\cdots b_{1n}\\ b_{21} & b_{22}\cdots\cdots\cdots b_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ b_{m1} & b_{m2}\cdots\cdots b_{mn}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12}\cdots\cdots a_{1n}-b_{1n}\\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22}\cdots\cdots a_{2n}-b_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2}\cdots a_{mn}-b_{mn}\end{bmatrix}$$

矩阵的减法也可以用负矩阵表示为加法。

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$$

例 4 设矩阵

$$A+B=C,$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

求矩阵 B。

解：

$$A+B=C,$$

$$B=C-A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0-1 & (-1)-2 & 2-3 & 3-(-1) \\ 3-2 & 0-0 & 1-1 & (-1)-2 \\ 1-(-1) & 2-1 & (-2)-0 & 0-(-1) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

在例 3 中，假如把矩阵 B 看成是 X 矩阵，可得矩阵方程

$$A+X=C$$

并且有唯一的解

$$X=C-A$$

当然也可以把 $A+B=C$ 看成是矩阵方程。

练 习 二

1．计算：

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$；

(2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

$- \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

2．解下列矩阵方程：

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \mathbf{X} - \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ 2b & 3c-1 & a-b \\ 1 & 2+a & 3-b \end{bmatrix} + \mathbf{X}$

$= \begin{bmatrix} 1-a & b+c & c-3 \\ 2a & 3b+c & 3 \\ 2 & -1 & c \end{bmatrix}$

第三节　数与矩阵相乘

根据矩阵加法的定义，我们可以设想，如果是几个相同的矩阵连加，也和几个相同的数连加一样，可用矩阵的个数乘以这个矩阵来表示，例如：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A+A+A=3A=3\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 3a_{11} & 3a_{12}\cdots\cdots 3a_{1n} \\ 3a_{21} & 3a_{22}\cdots\cdots 3a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 3a_{m1} & 3a_{m2}\cdots\cdots 3a_{mn} \end{bmatrix}$$

1. 数乘矩阵的定义

设A是一个矩阵，k是数域P中的任意数，则k与矩阵A的乘积记为kA。即

$$kA=k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \cdots\cdots ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} \cdots\cdots ka_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} \cdots ka_{mn} \end{bmatrix}$$

从定义中可以看出，数乘矩阵与数乘行列式显然是不同的。有什么不同呢？读者自己指出。

例 1　设矩阵 B 是矩阵 A 的 3 倍，已知矩阵 A 为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

求矩阵 B

解：

$$B = 3A = 3\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 12 & 15 \\ 0 & 6 & 0 \\ 9 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

2. 数乘矩阵的运算规律

设 k，l 为数域中的任意两个数，则这两个数与矩阵 A、B 满足以下的运算律：

（1）对矩阵的分配律，即

$$k(A+B)=kA+kB;$$

（2）对数的分配律，即

$$(k+l)A=kA+lA;$$

（3）对于数的结合律，即

$$k(lA)=(kl)A;$$

（4）数 1 乘以矩阵 A，A 不变，即

$$1\cdot A=A;$$

（5）数与两个矩阵相乘，可分别与两个矩阵结合，即

$$K(AB)=(KA)B=A(KB)$$

练　习　三

1．计算：

$$3\begin{bmatrix}2 & 4 & 7\\1 & 3 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6 & 10 & 20\\0 & 9 & 3\end{bmatrix}=?$$

2．计算：

$$2\begin{bmatrix}a & 5 & 6\\3 & 2 & 1\\b & 6 & 7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3a & 15 & 18\\9 & 6 & 3\\3b & 18 & 21\end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix}2a & 10 & 12\\6 & 4 & 2\\2b & 12 & 14\end{bmatrix}=?$$

第四节　矩阵的乘法

在第二章第八节中我们曾讲过行列式的乘法，矩阵的乘法和行列式的乘法类似，不同的是行列式的相乘必须是阶数相等，而矩阵一般行列不一定相等，那么应该怎样相乘呢？我们先看一个例子：

设 x_1，x_2；y_1，y_2，y_3；z_1，z_2 是三组变量，其中 x_1，x_2 与 y_1，y_2，y_3 的关系是

$$\begin{cases}x_1=a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3\\x_2=a_{21}y_1+a_{22}y_2+a_{23}y_3\end{cases}\qquad(1)$$

y_1，y_2，y_3 与 z_1，z_2 的关系是

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 \\ y_3 = b_{31}z_1 + b_{32}z_2 \end{cases} \tag{2}$$

求 x_1，x_2 与 z_1，z_2 的关系

将(2)式代入(1)可得

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}(b_{11}z_1 + b_{12}z_2) + a_{12}(b_{21}z_1 + b_{22}z_2) \\ \qquad + a_{13}(b_{31}z_1 + b_{32}z_2) \\ \quad = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})z_1 \\ \qquad + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})z_2, \\ x_2 = a_{21}(b_{11}z_1 + b_{12}z_2) + a_{22}(b_{21}z_1 + b_{22}z_2) \\ \qquad + a_{23}(b_{31}z_1 + b_{32}z_2) \\ \quad = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})z_1 + (a_{21}b_{12} \\ \qquad + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})z_2 \end{cases} \tag{3}$$

从(1)，(2)，(3)式中可得它们的系数矩阵分别为 A，B，C。则

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ a_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

从矩阵 A，B，C 中可以看出，矩阵 C 中第一行一列的元素

C_{11}就是A中第一行与B中第一列对应元素相乘积之和。C_{12}是A中的第一行与B中的第二列对应元素相乘积之和。余者类推。从而不难得出

$$C_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}b_{kj}$$

$(i,j=1,2)$

矩阵乘法的定义：

设A是一个$m\times s$矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1s} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2s} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdots a_{ms} \end{bmatrix}$$

B是一个$S\times n$矩阵

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12}\cdots\cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}\cdots\cdots b_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{s1} & b_{s2}\cdots\cdots b_{sn} \end{bmatrix}$$

作$m\times n$矩阵C，

$$C=AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1s} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2s} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdots a_{ms} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12}\cdots\cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}\cdots\cdots b_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{s1} & b_{s2}\cdots\cdots b_{sn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12}\cdots\cdots C_{1n} \\ C_{21} & C_{22}\cdots\cdots C_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_{m1} & C_{m2}\cdots\cdots C_{mn} \end{bmatrix}$$

则矩阵C称为A与B的乘积，记为

$$C=AB$$

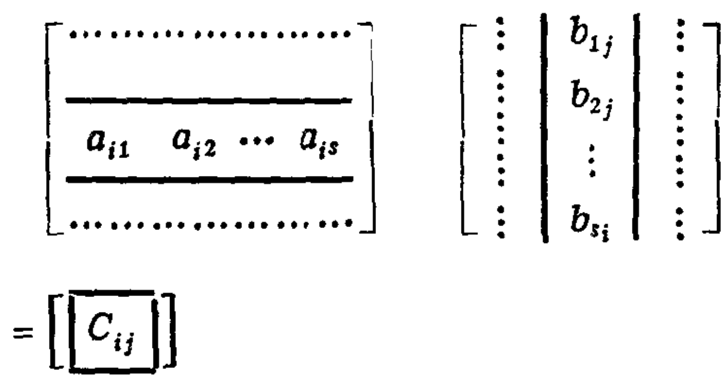
其中

$$C_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$$

$$=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj} \tag{4}$$

$$(i=1,2,\cdots m;\ j=1,2,\cdots n)$$

两个矩阵的乘法可用图表示为



由矩阵乘法的定义和上图可以看出，矩阵A与B的乘积C的第i行第j列的元素．等于第一个矩阵A的第i行的元素与第二个矩阵B的第j列的元素对应相乘积之和．因此这就要求在作矩阵乘法时，第一个矩阵的列数必须与第二个矩阵的行数相等，否则就谈不上对应元素相乘积之和．亦即不能相乘．

例 1　设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$

$C=AB$，求 C。

解：

$$C=AB=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\times1+0\times(-1)+3\times2 & 1\times1+0\times1+3\times0\\ 2\times1+1\times(-1)+0\times2 & 2\times1+1\times1+0\times0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}.$$

例 2　设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ -1 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 0 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

$C=AB$，求 C。

解：

$$C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ -1 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 0 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\times1+0\times2+2\times0+(-1)\times1 & 1\times2+0\times1+2\times3+(-1)\times4\\ 0\times1+1\times2+(-1)\times0+3\times1 & 0\times2+1\times1+(-1)\times3+3\times4\\ (-1)\times1+2\times2+0\times0+1\times1 & (-1)\times2+2\times1+0\times3+1\times4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 4\\ 5 & 10\\ 4 & 4\end{bmatrix}$$

例 3 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & -1\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}4 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix},$$

$C=AB$，求 C。

解：

$$C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\times4+0\times(-1)+3\times2+(-1)\times1 & 1\times1+0\times1+3\times0+(-1)\times3 & 1\times0+0\times3+3\times1+(-1)\times1\end{bmatrix}$$

$=[9 \quad -2 \quad 2]$。

例 4　设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 4 & 0 & 3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3\\ -2\\ 1\end{bmatrix},$$

$C=AB$，求 C。

解：

$$C=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 4 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ -2\\ 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0\times3+(-1)\times(-2)+2\times1\\ 2\times3+3\times(-2)+1\times1\\ 4\times3+0\times(-2)+3\times1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4\\ 1\\ 15\end{bmatrix}.$$

例 5　计算下列各题：

(1) $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix};$$

(2) $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & k & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix};$$

(3) $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ k & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{11}+a_{31} & ka_{12}+a_{32} & ka_{13}+a_{32} \end{bmatrix};
$$

(4) $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [b_1 b_2 \cdots\cdots b_n] = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2\cdots\cdots a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2\cdots\cdots a_2b_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2\cdots\cdots a_nb_n \end{bmatrix}$.

例 6　在线性方程组

$$
\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = bm \end{cases}
$$

中，如果用 A 表示系数矩阵 $m\times n$，用 X 表示未知数矩阵 $n\times 1$，用 B 表示常数项矩阵 $m\times 1$，即

$$
A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
$$

则线性方程组可写成矩阵方程的形式表示

$$
AX=B
$$

练　习　四

计算下列各式：

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$；

2. $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$；

3. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$；

4. $\begin{bmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{bmatrix}$；

5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$；

6. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$；

7. $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

第五节　矩阵乘法的运算律

我们已经知道两个矩阵A与B相乘，乘积C中的元素C_{ij}是第一个矩阵A的i行与第二个矩阵B的第j列的元素对应乘积之和，并要求第一个矩阵A的列数与第二个矩阵B的行数必须相等，否则就不能相乘。我们还从$AB=C$的结果中知道，矩阵C的行数一定等于第一个矩阵A的行数，C的列数一定等于第二个矩阵B的列数．那么A，B，C．之间的乘法运算还有哪些规律呢？这就是本节要研究的问题．

1．矩阵的乘法满足结合律．即

$$A(BC)=(AB)C.$$

证明：设

$A=(a_{ij})_{sn}$；　$B=(b_{jk})_{nm}$；　$C=(c_{kl})_{mt}$．

令

$$U=BC=(b_{jk}C_{kl})_{nt}=(U_{jl})_{nt};$$
$$V=AB=(a_{ij}b_{jk})_{sm}=(U_{ik})_{sm}.$$

根据乘法公式．知

$$U_{jl}=\sum_{k=1}^{m}b_{jk}C_{kl}\quad(j=1,2,\cdots n;l=1,2,\cdots,t);$$

$$U_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\quad(i=1,2,\cdots S;\ k=1,2,\cdots m)$$

于是

$$A(BC)=AU=(a_{ij}u_{jl})_{st}.$$

$$(AB)C=VC=(u_{ik}c_{kl})_{st}$$

这说明$A(BC)$与$(AB)C$的阶数都是$s\times t$。再看它们同行同列的元素是否相同。

$A(BC)$的第i行第l列处的元素为

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}u_{jl}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left[\sum_{k=1}^{m}b_{jk}c_{kl}\right]$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}a_{ij}b_{jk}C_{kl};$$

$(AB)C$的第i行第l列处的元素为

$$\sum_{k=1}^{m}U_{ik}C_{kl}=\sum_{k=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\right]C_{kl}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}C_{kl},$$

由于双重连加号可以交换次序。所以

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}a_{ij}b_{jk}C_{kl}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}C_{kl}.$$

例1 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 4\\ 3 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}.$$

验证 $A(BC)=(AB)C$.

$$BC=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 4\\ 3 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 4\\ 0\end{bmatrix},$$

$$A(BC)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 4\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix},$$

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 4\\ 3 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 10\\ 1 & 0 & 7\end{bmatrix},$$

$$(AB)C=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 10\\ 1 & 0 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}.$$

所以

$$A(BC)=(AB)C.$$

2. 矩阵的乘法和加法满足分配律．即

(1) $A(B+C)=AB+AC$;

(2) $(B+C)A=BA+CA$.

证明：只要证明出等式两端同行同列的元素相等，就证明了等式成立。

设 $A=(a_{ij})_{sm}$, $B=(b_{jk})_{mn}$, $C=(C_{jk})_{mn}$.

$(B+C)=(b_{jk}+C_{jk})_{mn}$,

$A(B+C)=[a_{ij}(b_{jk}+C_{jk})]_{sn}$

$A(B+C)$第 i 行第 k 列的元素为

$$\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(b_{jk}+C_{jk})=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}b_{jk}+\sum_{j=1}^{m}a_{ij}c_{jk},$$

$$(i=1,2,\cdots S;\ k=1,2,\cdots n)$$

AB 第 i 行第 k 列的元素为

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}$$

AC 第 i 行第 k 列的元素为

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}C_{jk}$$

$AB+AC$ 第 i 行第 k 列的元素为

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}+\sum_{j=1}^{m} a_{ij}C_{jk}\quad (i=1,2,\cdots S;k=1,2,\cdots n)$$

等式两端第 i 行 k 列的元素相同.

$(B+C)A=BA+CA$，证明留给读者.

证明此等式时应注意，矩阵乘法不满足交换律，即在一般情况下 $AB\neq BA$，所以$(B+C)A\neq A(B+C)$因此 对(1)的证明不能代替对(2)的证明.

为什么矩阵乘法不满足交换律呢？这是因为两个矩阵相乘时，必须第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数，否则就不能相乘，所以当 AB 有意义时，BA 不一定有意义，如 $A_{mn}B_{nk}$，当 $m\neq k$ 时 BA 就无意义，所以 $AB\neq BA$；即使 $m=k$，BA 有意义，AB 也不一定与 BA 相等，如 $A_{3\times2}$，$B_{2\times3}$，AB 的乘积是$(AB)_{3\times3}$阶的矩阵，而 BA 的乘积 却是$(BA)_{2\times2}$阶矩阵，所以 $AB\neq BA$；即使 AB 与 BA 都有意义，阶数又相等，AB 与 BA 相乘积的矩阵也不一定相等.

例 2　设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$，

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix};$$

而 $$BA=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{bmatrix}$$

所以

$$AB\neq BA$$

从这个例子中还可以看出，两个不为零的矩阵的乘积可能是零矩阵，这是矩阵乘法的一个特点。由此可知，假如 $AB=0$，$A\neq 0$，也不一定有 $B=0$；$A(B-C)=0$，$A\neq 0$，也不一定有 $B-C=0$。即 B 不一定等于 C。

在特殊情形下，个别的例子中矩阵相乘也是可以交换的。

例 3

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 2\\ -2 & -4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-7 & -6\\ 6 & -4\end{bmatrix},$$

$$BA=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ -2 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-7 & -6\\ 6 & -4\end{bmatrix}.$$

所以 $AB=BA$。

但这是个别例子，并不能代表一般规律。

3　任意矩阵与单位矩阵相乘不变

设A是$m\times n$阶矩阵，记作A_{mn}，E是n阶单位矩阵，记作E_n，则

$$A_{mn}E_n=A_{mn}$$

如果E是m阶单位矩阵，记作E_m，则

$$E_mA_{mn}=A_{mn}$$

但要注意，用单位矩阵右乘时，其阶数必须与被乘矩阵的列数相同；用单位矩阵左乘时，其阶数必须与所乘矩阵的行数相同，否则就无意义，读者可自己举例验证。

4　矩阵的幂．

n个相同的方阵相乘时，可写成幂的形式

$$\overbrace{AA\cdots\cdots A}^{n}=A^n,$$

$$A^mA^n=A^{m+n},$$

$$(A^m)^n=A^{mn}$$

但要注意的是：由于矩阵的乘法不满足交换律，所以在一般情况下

$$(AB)^k\neq A^kB^k.$$

例如：

$$(AB)^2=(AB)(AB)=ABAB\neq AABB.$$

例4　如果$AB=BA$，就说矩阵A与B可交换。设

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

求所有与A可交换的矩阵。

解： 设

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{bmatrix}$$

那么

$$AX=\begin{bmatrix}x_1+x_2 & y_1+y_2 & z_1+z_2\\ x_2+x_3 & y_2+y_3 & z_2+z_3\\ x_3 & y_3 & z_3\end{bmatrix}$$

$$XA=\begin{bmatrix}x_1 & x_1+y_1 & y_1+z_1\\ x_2 & x_2+y_2 & y_2+z_2\\ x_3 & x_3+y_3 & y_3+z_3\end{bmatrix}$$

因此，X与A可交换的充分必要条件是

$$\begin{cases}x_1+x_2=x_1\\ y_1+y_2=x_1+y_1\\ z_1+z_2=y_1+z_1\\ x_2+x_3=x_2\\ y_2+y_3=x_2+y_2\\ z_2+z_3=y_2+z_2\\ y_3=x_3+y_3\\ z_3=y_3+z_3\end{cases}$$

而这一组条件又等价于

$$\begin{cases}x_2=x_3=y_3=0\\ x_1=y_2=z_3\\ y_1=z_2\end{cases}$$

所以与A可交换的全部矩阵可表成

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & x_1 & y_1 \\ 0 & 0 & x_1 \end{bmatrix}$$

其中x_1，y_1，z_1可是数域中的任意数。

例如：设$x_1=1$，$y_1=2$，$z_1=3$则有

$$AX=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$XA=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$AX=XA$。

练　习　五

1. 设

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & -1 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

求$(AB)C$，$A(BC)$。

2．举出两个二阶方阵A与B，使

$$(AB)^2\neq A^2B^2$$

3．求与矩阵A的可交换矩阵：

(1) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$；

(2) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$。

4．计算下列各题：

(1) $\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n\end{bmatrix}$；

(2) $\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}^k$；

(3) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}^n$；

(4) $\begin{bmatrix}\text{con}\,\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \text{con}\,\alpha\end{bmatrix}^3$，

5. 计算 $AB-AB$.

(1) $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\1&2&3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4&1&1\\-4&2&0\\1&2&1\end{bmatrix}$;

(2) $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&2\\-1&2&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3&1&-2\\3&-2&4\\-3&5&-1\end{bmatrix}$.

第六节 矩阵的转置

在第一章中讲行列式时，我们讲过转置行列式，即一个行列式的行与列互换，所得的行列式称转置行列式. 那么什么是转置矩阵呢？它与转置行列式在性质上有什么不同呢？

1. 转置矩阵的定义 把一个矩阵 A 的行列互换，所得到的矩阵，称为转置矩阵. 记为 A'.

设

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$$

A 的转置矩阵 A' 就是指 A 的行列互换的矩阵，即

$$A'=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$$

显然，A是$m\times n$阶矩阵，而A'是$n\times m$阶矩阵，所以A与A'是根本不相等的，即使是方阵，一般情况下转置后也不相等。

A中第i行第j列的元素a_{ij}，在A'中是第j行第i列的元素，如a_{12}在A中是第1行第2列的元素，而在A'中却是第2行第1列的元素。

例 1

$$(1)\quad A=\begin{bmatrix}3 & 2 & a\\ b & 6 & 1\\ 7 & 4 & 2\\ 5 & c & 11\end{bmatrix}_{3\times 4},$$

$$A'=\begin{bmatrix}3 & b & 7 & 5\\ 2 & 6 & 4 & c\\ a & 1 & 2 & 11\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$A\neq A'$

$$(2)\quad B=\begin{bmatrix}3 & 2 & a\\ b & 6 & 1\\ 7 & 4 & 2\end{bmatrix}_{3\times 3},\qquad B'=\begin{bmatrix}3 & b & 7\\ 2 & 6 & 4\\ a & 1 & 2\end{bmatrix}_{4\times 3}$$

$B\neq B'$

2．对称矩阵

如果矩阵A是方阵，转置以后满足$A'=A$，则称A为对称矩阵。即A的第i行第j列的元素与A'的第i行第j列的元素相等。

例 2

$$A=\begin{bmatrix}2 & a & b & c\\ a & 3 & d & l\\ b & d & 4 & f\\ c & l & f & 5\end{bmatrix},\quad A'=\begin{bmatrix}2 & a & b & c\\ a & 3 & d & l\\ b & d & 4 & f\\ c & l & f & 5\end{bmatrix}$$

所以 $A=A'$。

3. 转置矩阵的性质

（1）矩阵 A 连续两次转置，仍等于 A。即

$$A'=B,\ B'=A,\ (A')'=A.$$

例 3

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix},\quad A'=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\\ a_{13} & a_{23}\end{bmatrix},$$

$$(A')'=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}=A$$

（2）两矩阵 A，B 之和的转置，等于 A，B 分别转置之和。即

$$(A+B)'=A'+B'$$

例 3 设

$$A=\begin{bmatrix}3 & 5 & a\\ b & 2 & 1\\ 4 & c & 3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}a & 2 & 0\\ 0 & b & 1\\ c & 3 & 2\end{bmatrix},$$

左端 $$A+B=\begin{bmatrix}3+a & 7 & a\\ b & 2+b & 2\\ 4+c & 3+c & 5\end{bmatrix},$$

$$(A+B)'=\begin{bmatrix}3+a & b & 4+c\\ 7 & 2+b & 3+c\\ a & 2 & 5\end{bmatrix},$$

右端 $$A'=\begin{bmatrix}3 & b & 4\\ 5 & 2 & c\\ a & 1 & 3\end{bmatrix},$$

$$B'=\begin{bmatrix}a & 0 & c\\ 2 & b & 3\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix},$$

$$A'+B'=\begin{bmatrix}3+a & b & 4+c\\ 7 & 2+b & 3+c\\ a & 2 & 5\end{bmatrix}$$

所以 $(A+B)'=A'+B'$.

这是先进行验证，下面再给出证明：

设

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{bmatrix}$$

要证明$(A+B)'=A'+B'$ 成立，只要证明$(A+B)'$的第 i

行第 j 列的元素与 $A'+B'$ 的第 i 行第 j 列的元素相等就可以了。($i=1,2,\cdots n$; $j=1,2,\cdots m$)

A 的第 i 行第 j 列的元素为 a_{ij},

B 的第 i 行第 j 列的元素为 b_{ij},

$(A+B)$的第 i 行第 j 列的元素为

$$a_{ij}+b_{ij}$$

$(A+B)'$ 的第 i 行第 j 列的元素为

$$a_{ji}+b_{ji}$$

A' 的第 i 行第 j 列的元素为 a_{ji},

B' 的第 i 行第 j 列的元素为 b_{ji},

$A'+B'$ 的第 i 行第 j 列的元素为

$$a_{ji}+b_{ji}.$$

所以 $(A+B)'=A'+B'$.

(3) 两矩阵 A, B 相乘积的转置，等于 B, A 分别转置后再相乘，即

$$(AB)'=B'A'$$

这里要注意等式右端是 $B'A'$，而不是 $A'B'$，因矩阵的乘法不适合交换律。

我们先验证，然后再给出证明.

例 4 设

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\1 & 1 & 3\\4 & 2 & 1\end{bmatrix},$$

$$AB=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\1 & 1 & 3\\4 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$=(9 \quad 2 \quad -1),$$

$$(AB)' = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix};$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B'A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

现在进行证明：设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}.$$

AB 中第 i 行第 j 列的元素为

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

$(AB)'$ 中第 i 行第 j 列的元素为

$$a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jn}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki};$$

B 的第 i 行第 k 列的元素为 b_{ik}，
B' 的第 i 行第 k 列的元素为 b_{ki}，
A 的第 k 行第 j 列的元素为 a_{kj}，
A' 的第 k 行第 j 列的元素为 a_{jk}，
$B'A'$ 的第 i 行第 j 列的元素为

$$b_{1i}a_{j1}+b_{2i}a_{j2}+\cdots+b_{ni}a_{jn}=$$

$$\sum_{k=1}^{n}b_{ki}a_{jk}=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}b_{kj}.$$

所以 $(AB)'=B'A'$。

（4）某数乘矩阵后转置，等于矩阵转置后乘某数，即

$$(kA)'=kA'$$

证明留给读者。

例 5　设 $k=2$，$A=\begin{bmatrix}3&2&0\\2&1&0\\0&a&b\end{bmatrix}$，

$$(kA)'=\left(2\begin{bmatrix}3&2&0\\2&1&0\\0&a&b\end{bmatrix}\right)'=\left(\begin{bmatrix}6&4&0\\4&2&0\\0&2a&2b\end{bmatrix}\right)'$$

$$=\begin{bmatrix}6&4&0\\4&2&2a\\0&0&2b\end{bmatrix},$$

$$kA'=2\begin{bmatrix}3&2&0\\2&1&a\\0&0&b\end{bmatrix}'=\begin{bmatrix}6&4&0\\4&2&2a\\0&0&2b\end{bmatrix}.$$

练　习　六

1．设

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\2 & 3 & 2\\-1 & 0 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\2 & -1 & 0\\-1 & -1 & 3\end{bmatrix}.$$

求：A'；B'；$(A+B)'$；$A'+B'$；$A'B'$；$B'A'$；$(AB)'$；$(A')^2$.

2．设

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 1\\0 & 4 & 2\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}4 & 1\\2 & 5\\3 & 4\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}2 & -1\\ & \\4 & 2\end{bmatrix}.$$

求：$(ABC)'$；$C'B'A'$.

第七节　矩阵乘积的行列式、伴随矩阵

1．n阶方阵行列式的定义

设n阶方阵A，由A的元素构成的行列式，记为

$$|A|=|a_{ij}|$$

叫做矩阵A的行列式.

例如：三阶方阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\\a & b & c\end{bmatrix},$$

A 的行列式为

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

本节所述矩阵，均指方阵而言.

2. 矩阵乘积行列式的定理

矩阵乘积的行列式，等于矩阵因子行列式的乘积. 即

$$|AB| = |A|\,|B|.$$

这一定理已在第二章第八节中证明过了，现在仅用二阶行列式进行说明.

设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

则

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} a_{21}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})$$

$$- (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})$$

$$= a_{12}a_{21}(b_{21}b_{12} - b_{11}b_{22})$$

$$+ a_{11}a_{22}(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})$$

$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = |A||B|.$$

例 1　设

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$AB=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$|AB|=\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}=-5.$$

$$|A||B|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=(-5)\times 1$$

$$=-5.$$

我们还可以把这个定理推展到多个因子的情况．如

$$|ABC|=|A||B||C|,$$

$$|A_1 B_2 \cdots A_t|=|A_1||A_2|\cdots|A_t|$$

3．矩阵的代数余子式．

在 n 阶行列式中，我们曾讲过任意元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij}，是划去 a_{ij} 所在的 i 行 j 列的元素，其余的元素按其原来的相对位置组成的行列式 $A_{ij}=((-1)^{i+j}M_{ij})$ 称 a_{ij} 的代数余子式．矩阵的代数余子式和行列式的代数余子式的意义完全相同．现举例说明：

例 2　设方阵

$$A=\begin{bmatrix} a & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

求A中元素a与3的代数余子式。

解：因元素a是1行1列的元素，所以

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3$$

因3是2行1列的元素，所以

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-4$$

如果方阵

$$A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

每个元素的代数余子式分别为

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$$

A中九个元素，共有九个代数余子式，即

A_{11}，A_{12}，A_{13}，A_{21}，A_{22}，A_{23}，A_{31}，A_{32}，A_{33}。

如果是n阶方阵，就有n^2个元素，每个元素对应一个代数余子式，则有n^2个代数余子式。即

$$A_{11}A_{12}\cdots A_{1n},$$
$$A_{21}A_{22}\cdots A_{2n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_{n1}A_{n2}\cdots A_{nn}$$

4．伴随矩阵的定义

设 A_{ij} 是矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

中元素 a_{ij} 的代数余子式，用 A_{ij} 作元素构成的矩阵

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

称为A的伴随矩阵。

显然

$$AA^*=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

仍然是一个 n 阶方阵，其中第 i 行 j 列的元素为

$$a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{in}A_{jn}$$

由行列式按一行(列)展开的公式可知，任何一行(列)的

元素，与其他行(列)的元素对应的代数余子式乘积之和等于零．所以

$$a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{i2}A_{j2}+\cdots a_{in}A_{jn}=\begin{cases}|A|, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

于是

$$AA^*=\begin{bmatrix}|A| & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & |A| & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & |A|\end{bmatrix}=|A|E$$

同理可得

$$A^*A=|A|E,$$

于是

$$AA^*=A^*A$$

这说明矩阵 A 与它的伴随矩阵 A^* 相乘满足交换律

由以上等式可知，当 $|A|\neq 0$ 时，有

$$\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A=E,\qquad A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)=E$$

例 3　设方阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & -4 & -3\\ 2 & -5 & -3\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

求 A 的伴随矩阵 A^*．

解：先求出 A 中每个元素的代数余子式

$A_{11}=1$，$A_{12}=1$，$A_{13}=-1$，$A_{21}=-2$，$A_{22}=-2$，

$A_{23}=2$，$A_{31}=-1$，$A_{32}=-3$，$A_{33}=3$．

将这九个代数余子式作为伴随矩阵 A^* 的元素．有

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

在例3中

$$A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right) = \left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A = E$$

能否成立？读者自证．

练　习　七

求下列矩阵 A，B，C 的伴随矩阵 A^*，B^*，C^* 并验证

$$AA^* = A^*A = |A|E.$$

1．$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$；

2．$B = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{bmatrix}$；

3．$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$．

第八节　逆　矩　阵

前面我们讲了矩阵的加、减、乘三种运算，会自然想到矩阵是否能作除法运算呢？也就是矩阵的乘法有没有逆运算呢？

根据矩阵的乘法可知，对于任意 n 阶方阵 A(本节所述矩阵均为方阵)和 n 阶单位矩阵 E，都有

$$AE = EA = A$$

从矩阵乘法的角度来看，n 阶单位矩阵 E，在 n 阶方阵中的地位类似于数中的 1 在乘法中的地位，一个不等于零的数 a 的倒数 a^{-1} 可以用等式

$$a^{-1}a = aa^{-1} = 1$$

来表示，那么对方阵 A 来说能不能存在一个 A^{-1} 使

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E$$

呢？这就是本节研究的主要问题。

1．逆矩阵的定义

对 n 阶方阵 A，如有 n 阶方阵 B，使得

$$AB = BA = E$$

则称方阵 A 是可逆的，而 B 就称为 A 的逆矩阵，记为 A^{-1}.

即

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E \tag{1}$$

例 1 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

$$AB=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&3&0\\5&6&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\-\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=E;$$

$$BA=\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\-\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&3&0\\5&6&4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=E.$$

所以
$$AB=BA=E.$$

这就是说A的逆矩阵是B，记为$B=A^{-1}$，同时A也是B的逆矩阵，记为$A=B^{-1}$. 因此有

$$AA^{-1}=E,\ BB^{-1}=E,$$

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E,$$

$$BB^{-1}=B^{-1}B=E.$$

从逆矩阵的定义中可以看出两点：一是如果A有逆矩阵，则逆矩阵是唯一的；二是矩阵和它的逆矩阵相乘可以交换.

2. 矩阵可逆定理：

矩阵A可逆的充分必要条件是A的矩阵行列式$|A|\neq 0$，而且逆阵$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$。（即逆矩阵等于它的伴随矩阵除以矩阵行列式）。

证明：充分性：（从$|A|\neq 0$证到A有逆矩阵）

当$|A|\neq 0$时，由伴随矩阵一节可知，有

$$A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)=E$$

根据本节可逆矩阵的定义$AA^{-1}=E$可得

$$A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)=AA^{-1}$$

所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

必要性：（从A可逆证到$|A|\neq 0$）

如果A是可逆的，必有逆阵A^{-1}存在，使

$$AA^{-1}=E$$

等式两边取行列式有

$$|AA^{-1}|=|E|,$$

$$|AA^{-1}|=|A||A^{-1}|=|E|=1$$

所以
$$|A|\neq 0$$

这个定理不仅给出了矩阵可逆的条件，而给出了求逆矩阵的公式$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$。

3．逆矩阵的求法：

根据求逆矩阵的公式

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

可知，求一个矩阵的逆阵可分三步：首先求出$|A|$，看是否等于零，判断是否可逆；如可逆再求伴随矩阵A^*；最后用$|A|$除A^*中的每一个元素，所得的矩阵即为所求的逆矩阵

例 2　设方阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 5 & 6 & 4\end{bmatrix}$$

求A^{-1}

解：首先求出$|A|$，判断A是否可逆。

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 5 & 6 & 4\end{vmatrix}=12\neq 0$$

即$|A|\neq 0$，则可逆。

其次求A^*，应先求出A中每个元素的代数余子式：

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & 0\\ 6 & 4\end{vmatrix}=12,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 5 & 4\end{vmatrix}=-8,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{vmatrix}=-3,\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0 & 0\\ 6 & 4\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 5 & 4\end{vmatrix}=4,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 5 & 6\end{vmatrix}=-6,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}=0,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{vmatrix}=3.$$

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \\ -3 & -6 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \\ -3 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

验证：

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

例 3　设方阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

求 A^{-1}.

解：(1) $|A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=2\neq 0$

则 A 可逆。

(2) 求 A^*：

$$A_{11}=2,\ A_{12}=2,\ A_{13}=-4,\ A_{21}=-1,$$
$$A_{22}=-1,\ A_{23}=3,\ A_{31}=1,\ A_{32}=-1,$$
$$A_{33}=-1.$$

则

$$A^*=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ -4 & 3 & -1\end{bmatrix}$$

(3) $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ -4 & 3 & -1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -2 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

验证：

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -2 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=E.$$

练　习　八

求下列矩阵的逆矩阵：

1. $\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}$;

2. $\begin{bmatrix}2&3&4\\5&-2&1\\1&2&3\end{bmatrix}$;

3. $\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$;

4. $\begin{bmatrix}a_1&0&0\cdots\cdots&0\\0&a_2&0\cdots\cdots&0\\0&0&a_3\cdots\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots\cdots&\cdots\\0&0&0\cdots\cdots&a_n\end{bmatrix}$. $(a_1a_2\cdots a_n\neq 0)$

第九节　逆矩阵的性质和应用

1. 逆矩阵的性质：

性质1　若A可逆，则A的逆阵行列式$|A^{-1}|$，等于A

的行列式$|A|$的倒数，即

$$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=|A|^{-1}$$

证明：根据矩阵乘积行列式可知

$$|AA^{-1}|=|A||A^{-1}|=|E|=1$$

所以

$$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}.$$

应注意，$A^{-1}\neq\frac{1}{A}$，因一个数除以一张表是无意义的，而$|A|$是一个数，除$|A|=0$以外，任何一个数都有它的倒数。

性质2　若A可逆，则A的逆阵A^{-1}的逆阵$(A^{-1})^{-1}$，等于A。即

$$(A^{-1})^{-1}=A.$$

证明：$\because$　$(A^{-1})(A^{-1})^{-1}=E$，$A^{-1}A=E$。

且逆矩阵是唯一的，故

$$(A^{-1})^{-1}=A$$

性质3　若A可逆，则转置矩阵A'也可逆。即

$$AA^{-1}=E$$

$$A'(A')^{-1}=E$$

证明：$|AA^{-1}|=|A||A^{-1}|=|A||A|^{-1}$

$=|A'||A'|^{-1}=|A'||(A')^{-1}|$

$=|A'(A^{-1})'|=|E|$

所以A'可逆。

性质4　若A可逆，则A转置的逆阵，等于逆阵的转

置．即

$$(A')^{-1}=(A^{-1})'$$

证明：$A'(A')^{-1}=E$,

$(AA^{-1})'=E'=E$,

$A'(A')^{-1}=(AA^{-1})'=A'(A^{-1})'$,

所以 $(A')^{-1}=(A^{-1})'$.

性质 5　若 A, B 都可逆，则 AB 也可逆．即

∵　A, B 都可逆

∴　$|A|\neq 0$, $|B|\neq 0$

$|AB|=|A||B|\neq 0$

故　AB 也可逆

性质 6　若 A, B 可逆，则 AB 可逆，且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

证明：因为

∵　$(AB)(B^{-1}A^{-1})$

$=A(BB^{-1})A^{-1}$

$=AEA^{-1}=AA^{-1}=E$.

∴　$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

$AA^{-1}=E$, $BB^{-1}=E$, $(AB)(AB)^{-1}=E$

所以

$$\begin{aligned}B^{-1}A^{-1}&=B^{-1}A^{-1}(AB)(AB)^{-1}=B^{-1}(A^{-1}A)B(AB)^{-1}\\&=B^{-1}EB(AB)^{-1}=(B^{-1}B)E(AB)^{-1}\\&=E\cdot E(AB)^{-1}=(AB)^{-1}.\end{aligned}$$

2．逆矩阵的应用

在第二章中，我们曾用行列式解线性方程组，现在把逆矩阵作为工具，用来解线性方程组．

设 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

其中系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

未知数可用矩阵表示为

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

常数可用矩阵表示为

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

矩阵 A，B，X 之间的关系可用矩阵方程表示为

$$AX = B.$$

如 $|A| \neq 0$，则 A 可逆，将上式两端同时左乘 A^{-1}，可得

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

则

$$X = A^{-1}B.$$

由此可知，线性方程组的解的矩阵，等于系数矩阵A的逆矩阵A^{-1}，左乘常数矩阵B。

例1 设线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2+\ \ x_3=1\\3x_1+x_2+2x_3=2\\ \ x_1-x_2+0x_3=3\end{cases}$$

求x_1，x_2，x_3。

解：由方程组可知，

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\3 & 1 & 2\\1 & -1 & 0\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}.$$

则矩阵方程为

$$AX=B,$$

$$X=A^{-1}B$$

现再要求出A的逆矩阵A^{-1}，首先看$|A|$是否为零，如$|A|\neq 0$，再求出A^*，然后用公式

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

由第八节逆矩阵中的例3可知

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\-2 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\text{因此}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\-2 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

所以

$$x_1=\frac{3}{2},\qquad x_2=-\frac{3}{2},\qquad x_3=-\frac{1}{2}.$$

练 习 九

1. 试证：如果A与B可交换，并且A是可逆的，那么A^{-1}与B也可交换。(提示：从$AB=BA$证起)

2. 试用逆矩阵求下列线性方程组的解。

$$(1)\ \begin{cases}x_1-x_2-x_3=2,\\2x_1-x_2-3x_3=1,\\-3x_1-2x_2+5x_3=0.\end{cases}$$

$$(2)\ \begin{cases}3x_2-2x_3-x_4=5,\\2x_2+2x_3+x_4=5,\\x_1-2x_2-3x_3-2x_4=-7,\\x_2+2x_3+x_4=10.\end{cases}$$

3. 设矩阵A可逆，求证A^*也可逆，并求$(A^*)^{-1}$。

第十节　矩阵的分块

1．分块矩阵的意义：

矩阵的计算是相当复杂的，为便于计算与讨论，我们常用几条横线和几条竖线将矩阵分成许多小块，每一小块本身自然也是一个矩阵，这些小块称为A的子块(或子矩阵)，分成子块的矩阵可写成以子块为元素的矩阵，这样的矩阵称为分块矩阵．

例 1　将矩阵A分成 4 块

$$A=\left[\begin{array}{cc:c}1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ \hdashline 1 & 2 & 2\end{array}\right]$$

可写成

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}$$

其中

$$A_{11}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix},\quad A_{12}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix},$$

$$A_{21}=[1\quad 2],\qquad A_{22}=[2]$$

矩阵的分块是根据需要，同一个矩阵可以分成不同的小块，每个小块又构成一个子矩阵．

例 2　把矩阵A分成 4 块：

$$A=\left[\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{array}\right]$$

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{33} \end{bmatrix}$$

其中

$$A_{11}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad A_{12}=\begin{bmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{24} & a_{25} \end{bmatrix},$$

$$A_{21}=[a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33}], \quad A_{33}=[a_{34} \quad a_{35}].$$

也可以把A分成六块.

$$A=\left[\begin{array}{cc|cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{23} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{array}\right],$$

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix},$$

其中

$$A_{11}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad A_{12}=\begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

$$A_{13}=\begin{bmatrix} a_{15} \\ a_{25} \end{bmatrix}, \quad A_{21}=[a_{31} \quad a_{32}],$$

$$A_{22}=[a_{33} \quad a_{34}], \quad A_{23}=[a_{35}].$$

2. 分块矩阵的加法

在进行矩阵的加法时，要求两个矩阵的行数和列数必须

对应相等，否则就不能相加，同理，分块矩阵的加法，也要求两个矩阵被分成的子块的块数，和每个子块的元素的排列，都对应相同。否则也不能相加。

例 3　设给出两个矩阵 A，B：

$$A=\left[\begin{array}{cc:cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\ \hdashline -1&2&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right];\quad B=\left[\begin{array}{cc:cc}1&0&3&2\\0&1&0&1\\ \hdashline 1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{array}\right]$$

将 A，B 各分成 4 个子块然后相加。

$$A=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{bmatrix}$$

其中

$$A_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=E_2,\quad A_{12}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},$$

$$A_{21}=\begin{bmatrix}-1&2\\1&1\end{bmatrix},\quad A_{22}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=E_2,$$

$$B_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad B_{12}=\begin{bmatrix}3&2\\0&1\end{bmatrix},$$

$$B_{21}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&-1\end{bmatrix},\quad B_{22}=\begin{bmatrix}4&1\\2&0\end{bmatrix},$$

$$A+B=\begin{bmatrix}E_2&0\\A_{21}&E_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}E_2+B_{11}&0+B_{12}\\A_{21}+B_{21}&E_2+B_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

读者可用矩阵的加法进行验证。

3．分块矩阵的乘法

分块矩阵的乘法与矩阵的乘法相似，分块时要注意，左边矩阵列的分组情况应与右边矩阵行的分组情况相同．即每个对应的子块也要做到左边子块的列数，等于右边子块的行数，否则就无法相乘。

例 3　设 A，B 与例 1 相同，求 AB。

解：由例 1 可知

$$A=\begin{bmatrix} E_2 & 0 \\ A_{21} & E_2 \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},$$

$$AB=\begin{bmatrix} E_2 & 0 \\ A_{21} & E_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} E_2B_{11} & E_2B_{12} \\ A_{21}B_{11}+E_2B_{21} & A_{21}B_{12}+E_2B_{22} \end{bmatrix}$$

其中

$$E_2B_{11}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_2B_{12}=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{21}B_{11}+E_2B_{21}=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{21}B_{12}+B_{22}=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

于是

$$AB=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

读者可用矩阵的乘法进行验证。

从此例中可以看出，当矩阵中含较多的1和零时，分成单位矩阵和零矩阵，用分块矩阵相乘比直接相乘要简便得多。

例 4　设

$$A=\left[\begin{array}{cc:cc} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \mu_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_1 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

$$B=\left[\begin{array}{cc:cc} \lambda_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \mu_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

其中

$$A_{11}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_1\end{bmatrix},\quad A_{12}=0,\quad A_{21}=0,$$

$$A_{22}=\begin{bmatrix}\mu_1 & 1\\ 0 & \mu_1\end{bmatrix},$$

$$B_{11}=\begin{bmatrix}\lambda_2 & 1\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix},\quad B_{12}=0,\quad B_{21}=0,\quad B_{22}=\begin{bmatrix}\mu_2 & 1\\ 0 & \mu_2\end{bmatrix}$$

求 AB。

解：

$$AB=\begin{bmatrix}A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}\\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}A_{11}B_{11} & 0\\ 0 & A_{22}B_{22}\end{bmatrix}.$$

其中

$$A_{11}B_{11}=\begin{bmatrix}\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1+\lambda_2\\ 0 & \lambda_1\lambda_2\end{bmatrix},\quad A_{22}B_{22}=\begin{bmatrix}\mu_1\mu_2 & \mu_1+\mu_2\\ 0 & \mu_1\mu_2\end{bmatrix}$$

所以

$$AB=\begin{bmatrix}\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1+\lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1\lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mu_1\mu_2 & \mu_1+\mu_2\\ 0 & 0 & 0 & \mu_1\mu_2\end{bmatrix}$$

例 5　计算

$$C=\left[\begin{array}{cc:cc}2 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right]^2,$$

$$C=\begin{bmatrix}A_{11} & 0\\ 0 & A_{22}\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}A_{11} & 0\\ 0 & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11} & 0\\ 0 & A_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^2{}_{11} & 0\\ 0 & A^2{}_{22}\end{bmatrix}$$

其中

$$A_{11}^2=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 4 & 4\end{bmatrix},$$

$$A_{22}^2=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}9 & 0\\ 6 & 9\end{bmatrix}$$

所以

$$C=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 4 & 4 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 6 & 9\end{bmatrix}$$

从例 3 和例 4 可以看出，如果 A,B 都是 n 阶矩阵，分块以后，除主对角线上的小块 $A_{ij}(i=j)$ 不为零外，其余的小块都是零.这样的矩阵称分块对角矩阵，它有下面的等式成立.

设 A，B 都是 s 阶对角矩阵

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{ss}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}B_{11} & & & \\ & B_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{ss}\end{bmatrix}$$

其中 A_{ij}，$B_{ij}(i=j=1,\ 2,\ \cdots s)$是同阶的，由定义可得

(1) $$A+B=\begin{bmatrix}A_{11}+B_{11} & & & \\ & A_{22}+B_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{ss}+B_{ss}\end{bmatrix}$$

(2) $$k\begin{bmatrix}A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{ss}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} kA_{11} & & & \\ & kA_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & kA_{ss} \end{bmatrix}$$

(3) $$AB=\begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & & & \\ & A_{22}B_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{ss}B_{ss} \end{bmatrix}$$

(4) $$\begin{bmatrix} A_{11} & & & 0 \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_{ss} \end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix} A_{11}^k & & & \\ & A_{22}^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{ss}^k \end{bmatrix}$$

为了便于讨论，往往对矩阵作下面几种方式进行分块。

(1) 矩阵A自身看成一块。

(2) 矩阵A的每一个元素看成一块。

(3) 矩阵A的每一列看成一块，记A_1，A_2，$\cdots$，A_n为A的n个列，那么，$A=[A_1,A_2,\cdots,A_n]$。

(4) 矩阵B的每一行看成一块，记$B_1,B_2,\cdots,B_m$为B的m个行，那么

$$B=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix}$$

例如，对于单位矩阵

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

证 $e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$, $e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}$, $\cdots$, $e_n=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$.

那么，$E=[e_1,e_2,\cdots,e_n]$.

由 $AE=A[e_1,e_2,\cdots,e_n]=[Ae_1,Ae_2,\cdots,Ae_n]$

与 $AE=A=[A_1,A_2,\cdots,A_n]$

根据矩阵相等的定义知道 $Ae_1=A_1$，$Ae_2=A_n,\cdots,Ae_n=A_n$.

练 习 十

1. 计算：

$$D=\begin{bmatrix}E & O\\O & P\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\O & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E & O\\O & Q\end{bmatrix}.$$

其中

$$E=[1],\quad p=\begin{bmatrix}1 & 0\\-2 & 1\end{bmatrix}\quad Q=\begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A_{11}=[3],\qquad A_{12}=[a\quad b],$$

$$A_{22}=\begin{bmatrix}2 & 4\\4 & 9\end{bmatrix}.$$

2. 已知：

$$C=\begin{bmatrix}A & X\\Y & 0\end{bmatrix}.$$

其中

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},$$

$$Y=[y_1 \quad y_2 \quad y_3]。$$

证明：

$$c^2=\begin{bmatrix} A^2+XY & AX \\ YA & YX \end{bmatrix}$$

3。设

$$A=\begin{bmatrix} L & O & O \\ O & M & O \\ O & O & N \end{bmatrix}.$$

其中

$$L=\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad M=\begin{bmatrix} u & 1 \\ 0 & u \end{bmatrix},$$

$$N=[\gamma]。\quad (\gamma,\ u,\ \gamma\neq 0)$$

求： A^2，A^p，A^{-1}。

第十一节 矩阵的初等变换

我们知道，矩阵是从线性方程组的系数引入的，矩阵的初等变换也必然和线性方程组的初等变换密切联系，因此在讲矩阵的初等变换之前，先讲线性方程组的初等变换。

1。线性方程组的初等变换．

线性方程组的初等变换是指以下三种变换。

（1）交换方程的顺序；

（2）用一个非零的数乘一个方程；

（3）用一个数乘一个方程加到另一个方程上。

例如：设线性方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
\tag{1}
$$

经初等变换后可以变为

$$
\begin{cases}
b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = c_1 \\
b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = c_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \cdots + b_{mn}x_n = c_m
\end{cases}
\tag{2}
$$

如果将线性方程组(2)经相反的初等变换也可以化为方程组(1)，所以经初等变换方程组的解不变，即方程组(1)的解也是方程组(2)的解，方程组(2)的解也都是方程组(1)的解．方程组(1)与方程组(2)是同解方程组．因此要求(1)的解，只求(2)的解就可以了．

如果我们用方程组(1)的系数和常数项组成矩阵

$$
\bar{A} = \begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} & b_2 \\
\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\
a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mm} & b_m
\end{bmatrix}
$$

这个矩阵比系数矩阵增加了常数项一列，叫做增广矩阵．如果把对线性方程组的初等变换施用到矩阵 $\bar{A}$ 上，则矩阵 $\bar{A}$ 经初等变换可变成矩阵 $\bar{B}$

$$
\bar{B} = \begin{bmatrix}
b_{11} & b_{12} \cdots b_{1n} & c_1 \\
b_{21} & b_{22} \cdots b_{2n} & c_2 \\
\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\
b_{m1} & b_{m2} \cdots b_{mn} & c_m
\end{bmatrix},
$$

这就是对矩阵的初等变换。

2. 矩阵初等行变换的定义

对矩阵 A 施行和线性方程组相同的三种变换，叫做矩阵 A 的初等行变换，即(1)互换A的两行；

(2) 用一个不等于零的数乘 A 的一行；

(3) 用一个数乘 A 的一行加到另一行上去。

例 1 试用初等行变换化简矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & -2 & 2\\ 4 & 1 & 2 & 1 & 3\\ 2 & 5 & 4 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

解：先用 -4，-2，-1 乘第一行，分别加到二、三、四行上去，得

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & -2 & 2\\ 0 & 9 & 6 & 9 & -5\\ 0 & 9 & 6 & 3 & -4\\ 0 & 3 & 2 & 3 & -\frac{5}{3}\end{bmatrix}$$

其次用$\frac{2}{9}$，-1，$-\frac{1}{3}$乘第二行，分别加到一、三、四行上去，得

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{8}{9}\\ 0 & 9 & 6 & 9 & -5\\ 0 & 0 & 0 & -6 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

再次用$\frac{1}{9}$乘第二行，用$-\frac{1}{6}$乘第三行，得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{8}{9} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{5}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

最后用－1乘第三行加到第二行上，得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{8}{9} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{7}{18} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

这就将矩阵 A 变换为简单形式．它的特点是第四行全是零，而且有3列只有一个元素是1，我们用初等变换把矩阵化为简单形状的目的是为解线性方程组．

3．利用矩阵的初等行变换解线性方程组

利用初等变换化简矩阵虽然很麻烦，但它实际应用是很广泛的，否则就没有变换的价值．下面就用矩阵的初等行变换来解线性方程组．

例2　解线性方程组：

$$
\begin{cases}
x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \\
4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\
2x_1 + 5x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \dfrac{1}{3}
\end{cases}
\tag{1}
$$

解：与该方程组相对应的增广矩阵是

$$
\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dfrac{1}{3} \end{bmatrix}
$$

显然与例 1 的矩阵 A 相同，我们对其施用和例 1 一样的初等行变换可得

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dfrac{1}{3} & 0 & \dfrac{8}{9} \\ 0 & 1 & \dfrac{2}{3} & 0 & -\dfrac{7}{18} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\dfrac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

根据这个增广矩阵，列成的线性方程组是

$$
\begin{cases}
x_1 + \dfrac{1}{3}x_3 = \dfrac{8}{9} \\
x_2 + \dfrac{2}{3}x_3 = -\dfrac{7}{18} \\
x_4 = -\dfrac{1}{6}
\end{cases}
\tag{2}
$$

这个方程组与方程组(1)是同解线性方程组，所以(2)的解就是(1)的解。解此方程组得

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{8}{9} - \dfrac{1}{3}x_3 \\ x_2 = -\dfrac{7}{18} - \dfrac{2}{3}x_3 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = -\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

这就是线性方程组(1)的解，其中 x_3 可取任意数，所以原方程组(1)有无穷多个解。

例 3　解线性方程组

$$\begin{cases} x + y - 3z - w = 0 \\ 3x - y - 3z + 4w = 0 \\ x + 5y - 9z - 8w = 0 \end{cases} \tag{1}$$

解：与齐次线性方程组对应的增广矩阵为 $\bar{A}$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

因最后一列都是零，所以进行初等变换是不会改变的，故只对系数矩阵 A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 \end{bmatrix}$$

进行初等变换就可以了。

先用 -3，-1 乘第一行，分别加到第二、三行上，得

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 6 & 7 \\ 0 & 4 & -6 & -7 \end{bmatrix}$$

再用$\frac{1}{4}$，1 乘第 2 行，分别加到第一、三行上，得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & -4 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

最后用$-\frac{1}{4}$乘第二行，得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

经过一系列的初等行变换，得到这个简单形状的系数矩阵，其对应的线性方程组是

$$\begin{cases} x-\frac{3}{2}z+\frac{3}{4}w=0 \\ y-\frac{3}{2}z-\frac{7}{4}w=0 \end{cases}$$

解：得

$$\begin{cases} x=\frac{3}{2}z-\frac{3}{4}w \\ y=\frac{3}{2}z+\frac{7}{4}w \\ z=z, \quad w=w \end{cases}$$

这就是线性方程组(1)的解。其中 z，w 可取任意值，所以这个齐次线性方程组有无穷多个解。

例 4　解线性方程组

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x-3y+z=0 \\ 4x+y-z=-1 \end{cases}$$

解：对矩阵 $\bar{A}$

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

进行初等变换，得

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

从第三行（0　0　0　－3）对应的方程

$$0\cdot x+0y+0z=-3$$

中得出

$$0=-3$$

这是不可能的，所以最后一个方程是矛盾方程，故原方程组无解。

练 习 十 一

试用初等变换解下列方程组：

1. $$\begin{cases} 2x+y-z+w=1 \\ 3x-2y+z-3w=4 \\ x+4y-3z+5w=-2 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 2x+y-z+w=1 \\ 4x+2y-2z+2w=2 \\ x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}w=\frac{1}{2} \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} x+y+z+\omega=0 \\ 2x+3y+z+w=0 \\ 2x+y-z=0 \\ x+y-z+2\omega=0 \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 3x-2y+z=4 \\ 4+4y-3z=7 \\ x+2y+z=4 \end{cases}$$

第十二节 矩 阵 的 秩

矩阵和行列式都来源于线性方程组，又把它们作为工具用来解线性方程组．本节讨论矩阵的秩，也是为了用来解线性方程组．

1．矩阵子式的定义

在一个m行n列矩阵A中，任取k行k列，位于k行k列相交处的元素构成的k阶行列式，叫做矩阵A的k阶子式。

A的1阶子式，就是A中的一个元素构成，一般k阶子式有好些个，但最大的子式是m阶($m\leqslant n$)。

例如：设矩阵A

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}$$

当$k=1$时

$$|a_{11}|,\quad |a_{12}|,\quad \cdots,\quad |a_{45}|$$

都是一阶子式。

当$k=2$时

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix}$$

是二阶子式中的两个。

当$k=3$时

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

是三阶子式中的两个。

k的最大值是4（因为A是四行五列的矩阵）

2. 矩阵的秩的定义

如果在矩阵A_{mn}中，有一个γ阶子式不为零，而所有$\gamma+1$阶子式都为零，则称矩阵的秩为γ，有时，记为秩(A)

$=\gamma$.

例如：在矩阵 A

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

中，子式的最高阶数是3，只要有一个三阶子式不为零，则矩阵 A 的秩就是3，如果3阶子式全为零，再看二阶子式，如果二阶子式中有一个不为零，则矩阵 A 的秩就是2.

例1．设矩阵 A

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

求矩阵 A 的秩．

解：先看三阶子式是否全为零，如果有一个不为零，则秩等于3．

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}=6+24+6-18-12-4=2\neq 0$$

所以矩阵 A 的秩是3．

3．满秩矩阵和降秩矩阵的定义

如果 A 是 n 阶方阵，A 的秩 γ 等于 n，（$|A|\neq 0$）则称 A 为满秩矩阵．否则称为降秩矩阵．

例如：设三阶方阵 A

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

如果

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$

即 $r=3$，称 A 为满秩矩阵。如果 $|A|=0$ 称降秩矩阵。

从定义中可以看出，只有方阵才有满秩或降秩可言，不是方阵便不存在满秩和降秩的问题。

例 2. 设方阵 A

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

判断是满秩还是降秩的矩阵。

解：计算A的行列式是否为零，如 $|A|\neq 0$ 即 $\gamma=3$，则为满秩，否则为降秩

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}=2\neq 0$$

即 $\gamma=3$，故方阵A为满秩矩阵。

例 3 设矩阵 A

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

（1）判断是否满秩；

（2）计算A的秩。

解：(1)矩阵是否满秩，是对方阵而言，A非方阵，故无满秩或降秩可谈。

（2）计算A的秩时，先计算一切三阶子式是否全为零．即

$$\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\1 & 2 & -3\\4 & 4 & -2\end{vmatrix}=0,\quad\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\1 & 2 & 2\\4 & 4 & 3\end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\1 & -3 & 2\\4 & -2 & 3\end{vmatrix}=0,\quad\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\2 & -3 & 2\\4 & -2 & 3\end{vmatrix}=0$$

这说明一切三阶子式全为零，故矩阵的秩不可能是 3。

再计算一切二阶子式是否全为零，即

$$\begin{vmatrix}3 & 2\\1 & 2\end{vmatrix}=4\neq 0$$

即二阶子式只少有一个不为零，所以矩阵A的秩 $r=2$。

练 习 十 二

判断下列矩阵是否满秩并计算其秩：

1. $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 2 & 1\\3 & 4 & 3\end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 2\\1 & -1 & 2 & -1\\1 & 3 & -4 & 4\end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix}2 & 1 & 3 & -1\\3 & -1 & 2 & 0\\1 & 3 & 4 & -2\\4 & -3 & 1 & 1\end{bmatrix}$

第十三节 简化矩阵求秩定理

由上节可知，如果直接用矩阵的定义计算矩阵的秩，有时须计算很多的行列式，这是很麻烦的，为了简化求矩阵秩的过程中的计算，给出下面的定理．

1．简化矩阵求秩定理

矩阵经初等变换后其秩不变．矩阵的初等变换有三种，我们只要分别证明经过这三种变换，矩阵的秩不变就可以了．

（1）互换矩阵A的两行或两列，矩阵的秩不变．

因为交换行列式的两行(列)，行列式仅改变正负号，所以变换后的矩阵每一个子式与原来矩阵中对应的子式或者相等，或者仅改变正负号．不会出现等于零与不等零的差别，故矩阵的秩不变．

（2）用一个不等于零的数，乘矩阵A的一行或一列，矩阵的秩不变．

因为行列式的某一行(列)，乘以一个不为零的数k，等于行列式乘以k．所以变换后的子式与原来对应的子式或者相等，或者仅差k倍，不存在等于零与不等于零的差别．故矩阵的秩不变．

（3）用一个数乘A的一行(或一列)，加到另一行（或一列）上，矩阵的秩不变．

我们仅对一个四阶矩阵来证明，一般$m\times n$阶矩阵的证法也相同．

设矩阵A

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{bmatrix}$$

的秩是 2，现证明

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31}+ka_{41} & a_{32}+ka_{42} & a_{33}+ka_{43} & a_{34}+ka_{44}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{bmatrix}$$

的秩也是 2。

因A的秩是 2，故A的一切三阶子式都是零。

A和$\bar{A}$只有第三行不同，除第三行外，A的一切三阶子式与$\bar{A}$的一切三阶子式都相同，所以$\bar{A}$中不包括第三行的一切三阶子式都为零。

若$\bar{A}$ 的三阶子式既含有第三行也含有第四行的元素，则由行列式的性质可知，这些三阶子式与A中对应的三阶子式相等，即都等于零。

若$\bar{A}$ 的子式含有第三行，但不含有第四行的元素，例如

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31}+ka_{41} & a_{32}+ka_{42} & a_{33}+ka_{43}\end{vmatrix}$$

由行列式的性质可知

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

等式中的两个行列式都是A中的三阶子式，故都等于零。所以$D=0$。

因此，$\bar{A}$的一切三阶子式也都等于零.但$\bar{A}$的一切二阶子式是否有不等于零的呢？现在还不能断定。所以$\bar{A}$的秩也不能断定就是2，只能断定$\bar{A}$的秩$\leqslant 2$，即$\bar{A}$的秩$\leqslant A$的秩。我们要证明的是$\bar{A}$的秩$=A$的秩，这只有再对$\bar{A}$施行初等变换（第四行乘$-k$加到第二行上去），便可以得出A。用上面的证明方法，可证出A的秩$\leqslant\bar{A}$的秩。所以A的秩$=\bar{A}$的秩。

综合以上所证明的三种情形，可得出结论：矩阵经初等变换它的秩不变。

例1　用初等变换求矩阵A的秩

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

解：由第十一节“矩阵的初等变换”例2可知，矩阵A经初等变换可化为

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{8}{9}\\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{7}{18}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

不难看出，这个矩阵的一切四阶子式全为零．但是三阶子式中

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\neq 0$$

所以A的秩是 3。

2．矩阵的标准形

矩阵前面第 i 行第 i 列上的数是 1，其余都是零的简单形状，叫做矩阵的标准形。

例如：

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

等，都是矩阵的标准形。

一切矩阵经初等变换都可以化为标准形，用标准形求矩阵的秩就更明显了。

例 2　将例 1 中的矩阵 B 化为标准形。

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{8}{9}\\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{7}{18}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

用 $-\frac{1}{3}$ 乘第一列，$-\frac{2}{3}$ 乘第二列都加到第三列上，并将三、四两列互换，得

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{9}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{18}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

再用 $-\frac{8}{9}$ 乘第一列，$\frac{7}{18}$ 乘第二列，$\frac{1}{6}$ 乘第三列，都加到第五列上，得

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

这便是将矩阵 B 化为标准形。

例 3　用矩阵的初等变换计算矩阵 A 的秩。

$$A=\begin{bmatrix}0 & 2 & -4\\ -1 & -4 & 5\\ 3 & 1 & 7\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

解：交换一、二行，交换后第一行乘 -1，得

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & -5\\ 0 & 2 & -4\\ 3 & 1 & 7\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

用 -3，-2 乘第一行，分别加到第三、四行上，得

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & -5\\ 0 & 2 & -4\\ 0 & -11 & 22\\ 0 & -5 & 10\end{bmatrix}$$

用 $\frac{1}{2}$ 乘第二行得

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & -5\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & -11 & 22\\ 0 & -5 & 10\end{bmatrix}$$

用 -4，11，5 乘第二行，分别加到一、三、四行上，得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

现在已能看出，一切三阶子式全为零，二阶子式不为零，所以矩阵A的秩是 2。

如果要将矩阵化为标准形状，可 用-3，2 分别乘第一、二列，都加到第三列上去，得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

显然有一个二阶子式不为零，所以矩阵A的秩是2．

3．矩阵的阶梯形

计算矩阵的秩，可直接由定义计算，也可用线性变换将矩阵化为标准形状进行计算。但是利用矩阵的阶梯形计算矩阵的秩，则更为简便。

用同样的方法可以证明，任一个$m\times n$矩阵A都可以经过初等变换化为下面形状的矩阵(称为阶梯形矩阵)：

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12}\cdots c_{1r} & c_{1r+1}\cdots c_{1n} \\ 0 & c_{22}\cdots c_{2r} & c_{2r+1}\cdots c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0\cdots\ c_{rr} & c_{rr+1}\cdots c_{rn} \\ 0 & 0\cdots\cdots 0 & 0\cdots\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0\cdots\cdots 0 & 0\cdots\cdots 0 \end{bmatrix}$$

其中 $c_{ii}\neq 0$, $i=1,2,\cdots,r$。前 r 个行称为非零行（因为每一行至少有一个元素 $c_{ii}\neq 0$）。化为阶梯形显然要比化为标准形省事，而且容易知道阶梯形的秩数就等于它的非零行的个数。所以，求 A 的秩的更为简单的方法就是：将 A 用初等变换化为阶梯形并数一数阶梯形非零行的个数，那么这个个数就是 A 的秩。

例 4　求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & -2 & 2\\ 4 & 1 & 2 & 1 & 3\\ 2 & 5 & 4 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

的秩。

解：先用初等变换把 A 化为阶梯形

$$A\to\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & -2 & 2\\ 0 & 9 & 6 & 9 & -5\\ 0 & 9 & 6 & 3 & -4\\ 0 & 3 & 2 & 3 & -\frac{5}{3}\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & -2 & 2\\ 0 & 9 & 6 & 9 & -5\\ 0 & 0 & 0 & -6 & 1\\ 0 & 9 & 6 & 9 & -5\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & -2 & 2\\0 & 9 & 6 & 9 & -2\\0 & 0 & 0 & -6 & -2\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -2 & -2 & -1 & 2\\0 & 9 & 6 & 6 & -2\\0 & 0 & -6 & 0 & -2\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

最后的阶梯形有三个非零行（其实这从倒数第二个矩阵已经可以看出来了），所以A的秩$=3$。

练 习 十 三

用线性变换计算下列矩阵的秩：

1. $\begin{bmatrix}2 & 0 & 2 & 2\\0 & 1 & 0 & 0\\2 & 1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix}1 & 4 & -1 & 2 & 2\\2 & -2 & 1 & 1 & 0\\-2 & -1 & 3 & 2 & 0\end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\75 & 94 & 53 & 132\\75 & 94 & 54 & 134\\25 & 32 & 20 & 48\end{bmatrix}$

第十四节　利用初等变换求逆矩阵

在本章第八节中，我们曾给出求逆矩阵的公式

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}$$

用这个公式求逆矩阵，显然是太麻烦了，现在我们要寻求一种比较简单的方法，这就是利用初等变换求逆矩阵。

1．初等矩阵的定义：

由单位矩阵 E，经过一次初等变换，所得到的矩阵，称为初等矩阵。

因为初等变换有三种，所以初等矩阵也有三类，每个初等行变换，都有一个初等矩阵与之对应。例如：

（1）把矩阵 E 的第 i 行与第 j 行互换，得到的初等矩阵用 $P(i,j)$表示。即

$$P(i,j)=\left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & \text{\Large 0} & \\
 & & 0 & \cdots & \cdots & 1 & & & \\
 & & \vdots & 1 & & \vdots & & & \\
 & & \vdots & & \ddots & \vdots & & & \\
 & & \vdots & & 1 & \vdots & & & \\
 & \text{\Large 0} & 1 & \cdots & \cdots & 0 & & & \\
 & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & 1
\end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ i\text{行} \\ \\ \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

现以五阶矩阵 E_5 为例

$$P(2,4)=\begin{bmatrix}
1 & & & & \\
 & 0 & & 1 & \\
 & & 1 & & \\
 & 1 & & 0 & \\
 & & & & 1
\end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ 2\text{行} \\ \\ 4\text{行} \\ \\ \end{array}$$

$P(2,4)$ 是表示单位矩阵二，四两行互换。$P(1,2)$ 是表示单位矩阵一、二两行互换，即

$$P(1,2)=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

如果矩阵A左乘 $P(i,j)$，就可使矩阵A的第 i 行与 j 行互换。例如：设

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$$

则

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{22}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$$

(2) 用非零数k乘E的第 i 行，得到的初等矩阵用 $P(i(k))$表示。即

$$P(i(k))=\begin{bmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&k&&\\&&&&1&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{bmatrix}\text{第 } i \text{ 行}$$

例如：

$$P(2(3))=\begin{bmatrix}1 & & 0\\ & 3 & \\ 0 & & 1\end{bmatrix}$$

要使矩阵A的第二行变成原来的3倍，可左乘$P(2(3))$。如

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

(3) 把矩阵E的第j行的k倍加到第i行上，得到的初等矩阵用$P(i,j(k))$表示，即

$$P(i,j(k))=\begin{bmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & \text{\Large 0} & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & \text{\Large 0} & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \text{第 } i \text{ 行}\\ \\ \text{第 } j \text{ 行}\\ \\ \\ \end{matrix}$$

仍以E_3为例：

$$P(1,3(5))=\begin{bmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

这就是把矩阵第三行的5倍加到第一行上。

如果要使矩阵A的第i行变成第i行加第j行的k倍，就左乘$P(i,j(k))$，例如：

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 5\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}+5a_{31} & a_{12}+5a_{32} & a_{13}+5a_{33}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

这三种变换对列同样成立.

上述三类初等矩阵$P(i,j)$, $P(i(k))$, $P(i,j(k))$. 都是由单位矩阵经初等变换而来的，由于初等变换不改变矩阵的秩，所以上面的三类初等矩阵都是满秩的. 矩阵的三种初等变换，可用左乘三类初等矩阵来表示，并有下面的定理.

2. 用初等行变换求逆矩阵的定理

设A为n阶满秩矩阵，P_1，P_2，$\cdots P_m$为n阶初等矩阵，则n阶矩阵A，经初等行变换可化成单位矩阵E，E等于用初等矩阵左乘A的乘积. 即

$$P_mP_{m-1}\cdots P_2P_1A=E \tag{1}$$

因为每做一次初等变换，就等于左乘一个相应的初等矩阵. 任何满秩矩阵都可以经初等变换化为单位矩阵E，所以任何满秩矩阵左乘初等矩阵都可以化为单位矩阵E.

定理本身已得证明，但我们本节的目的是得出求矩阵A的逆矩阵的方法，所以还要继续进行研究.

由

$$P_mP_{m-1}\cdots P_2P_1A=E, \tag{1}$$

$$A^{-1}A=E, \tag{2}$$

可得

$$P_mP_{m-1}\cdots P_2P_1 = A^{-1}. \tag{3}$$

由任何矩阵乘单位矩阵 E，原矩阵不变，可得

$$P_mP_{m-1}\cdots P_2P_1E = A^{-1} \tag{4}$$

从(1)(4)两式可知，把A化为单位矩阵E的那些初等矩阵，也可将E化为A的 逆矩阵A^{-1}，因每一个单位矩阵对应一个初等变换，所以也可说成把A化为单位矩阵E的那些初等行变换，也可将单位矩阵E化为A的 逆矩阵A^{-1}。这样就可用初等行变换求逆矩阵了，在计算时，我们把E放在A的右边，当用行初等变换把A化为E时，同时也把E化成A的逆矩阵A^{-1}了。这就是用初等变换求逆矩阵的方法，这比用公式 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$ 求逆矩阵要简单得多。

例 1 试用初等变换求矩阵A的逆矩阵。

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 3\end{bmatrix}$$

解：按求逆矩阵的方法，具体计算如下：

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -6 & -3 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$
\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\
0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1
\end{array}\right]
$$

$$
\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\
0 & -2 & 0 & 3 & 6 & -5 \\
0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1
\end{array}\right]
$$

$$
\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\
0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1
\end{array}\right]
$$

于是

$$
A^{-1}=\begin{bmatrix}
1 & 3 & -2 \\
-\frac{2}{3} & -3 & \frac{5}{2} \\
1 & 1 & -1
\end{bmatrix}
$$

例 2　设

$$
A=\begin{bmatrix}
0 & 2 & 1 \\
-1 & 1 & 4 \\
2 & -1 & -3
\end{bmatrix}
$$

求 A^{-1}。

解：具体计算如下：

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\
2 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

$$
\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}
-1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

$$
\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc} -1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc} -1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

$$
\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc} -1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 1 & -4 & -2 \end{array}\right]
$$

$$
\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc} -1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \end{array}\right]
$$

$$
\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{5}{9} & \frac{7}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \end{array}\right]
$$

于是

$$
A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{5}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}
$$

练 习 十 四

利用初等变换求下列各矩阵的逆矩阵：

1. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -3 & 2 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$

本 章 提 要

1. 矩阵的定义。
2. 矩阵的加法：

$(a_{ij})_{sn}+(b_{ij})_{sn}=(c_{ij})_{sn}$。

$A+B=B+A$。

$A+(B+C)=(A+B)+C$。

$$A-B=A+(-B).$$

3. 矩阵与数的乘法：

$$k(a_{ij})_{sn}=(ka_{ij})_{sn}.$$

$$k(A+B)=kA+kB.$$

$$(k+l)A=kA+lA.$$

$$k(lA)=(kl)A.$$

4. 矩阵的乘法：

$$(a_{ij})_{sn}\cdot(b_{ij})_{nm}=(C_{ij})_{sm},$$

其中 $C_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}(i=1,2,\cdots s;\ j=1,2,\cdots m)$.

$$A(BC)=(AB)C.$$

$$A(B+C)=AB+AC.$$

$$(B+C)A=BA+CA.$$

$$k(AB)=(kA)B=A(kB).$$

$$E_sA_{sn}=A_{sn}E_n=A_{sn}.$$

5. 转置矩阵

$$(a_{ij})'_{sn}=(a'_{ij})_{ns}$$

其中 $a'_{ij}=a_{ji}(i=1,2,\cdots n;\ j=1,2\cdots s)$.

$$(A')'=A.$$

$$(A+B)'=A'+B'.$$

$$(AB)'=B'A'.$$

$$(kA)'=k'A'.$$

6. 矩阵乘积的行列式

$$|AB|=|A||B|.$$

$$|A_1A_2\cdots A_n|=|A_1||A_2|\cdots|A_n|.$$

7. 伴随矩阵

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

其中 A_{ij} 是矩阵 A 中 a_{ij} 的代数余子式。

8. 逆矩阵：

(1) 定义：若 A 为方阵，如果有方阵 B 存在，使

$$AB = BA = E$$

则 A 称为可逆矩阵，B 称为 A 的逆矩阵，记为 A^{-1}。

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E。$$

(2) 运算规律：

$$(A^{-1})^{-1} = A。$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}。$$

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'。$$

(3) 可逆的充要条件

$$|A| \neq 0$$

(4) 用伴随矩阵求逆矩阵

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

9. 矩阵的分块

(1) 分块矩阵的加法运算。

(2) 分块矩阵的乘法运算。

10. 矩阵的初等变换

(1) 互换 A 的两行(两列)。

(2) 用一个不等于零的数乘 A 的一行(一列)

(3) 用一个数乘 A 的一行(一列)加到另一行(列)上。

11．矩阵的秩

（1）秩的定义。

（2）满秩和降秩。

（3）矩阵经初等变换秩不变．

（4）用初等变换的方法求秩．

12．利用初等变换的方法求逆矩阵

（1）初等矩阵的定义．

（2）用初等变换求逆矩阵的方法

$$[A \vdots E] \xrightarrow{\text{经初等行变换}} [E \vdots A^{-1}]$$

习　题

1．下面的矩阵A与B是否可以相加？如果可以，就求出它们的和$A+B$。

（1）$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$　　$B=\begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

（2）$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$　　$B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

2．设$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$试计算$|kA|$与$k|A|$

式中k为一个常数，$|A|$表示矩阵A对应的行列式。

3．求出下面各矩阵的转置矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4 & 0\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}2\\0\\0\\1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & -1\\3 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

4. 求乘积 AB 与 BA。

(1)

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3 & -5\\1 & 7 & 3 & 1\\2 & -1 & -1 & 2\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\5\end{bmatrix}$$

(2)

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\2 & 6 & 8\\-1 & 5 & 7\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}1 & 3 & -5\\3 & 6 & -1\\-5 & -3 & 3\end{bmatrix}$$

(3)

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\-1 & -1 & 2\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & -1\\1 & -1\end{bmatrix}$$

(4)

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}-3\\4\\6\\8\end{bmatrix}$$

(5)

$$A=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 \cdots a_n\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$$

(6)

$$A=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 \cdots x_n\\y_1 & y_2 \cdots y_n\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\x_2 & y_2\\\cdots & \cdots\\x_n & y_n\end{bmatrix}$$

5．求 A^k．

(1)
$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$
(2)
$$A=\begin{bmatrix}\lambda_1&0\cdots0\\0&\lambda_2\cdots0\\\cdots\cdots&\cdots\cdots\\0&0\cdots\lambda_n\end{bmatrix}$$

6．设 $A=\begin{bmatrix}1&-2&3\\2&-4&1\\3&-5&2\end{bmatrix}$，计算 $3A^2-2A+5E$．

E 为单位矩阵．

$$E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

7．验证方阵 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ 满足方程 $x^2-(a+d)x+(ad-bc)E=0$

8．证明：下列等式成立的充分必要条件是矩阵 A 与 B 可交换．即 $AB=BA$．

(1) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$．

(2) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$．

9．求满足下列等式的 λ 值

$$\begin{bmatrix}-2&0&3\\0&-1&1\\\lambda^2&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\lambda\\\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\lambda\\3\\-1\end{bmatrix}$$

10．下列各方阵是否可逆？若可逆，试求出其逆矩阵．

(1) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$　　(2) $\begin{bmatrix} x^2+1 & 2 \\ x & -1 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$　　(4) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 10 \end{bmatrix}$　(6) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(7) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$　　(8) $\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \cdots a^n \\ 0 & 1 & a & a^2 \cdots a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & a \cdots a^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots 1 \end{bmatrix}$

11. 解下面的矩阵方程：

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$

(2) $X \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

(4) $X^2 = 0$　　x 为二阶方阵，$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

12. 设$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$，计算$(E+A)(E-A)^{-1}$.

13. 用初等变换法求第10题中各矩阵的逆矩阵.

14. 设A为可逆矩阵. 证明：

(1) 如果有$AX=AY$，那么就有$X=Y$.

(2) 如果有$AB=BA$，那么就有$A^{-1}B=BA^{-1}$.

(3) 如果A是对称的，那么A^{-1}也是对称的.

15. 证明：如果三角形矩阵是可逆的，那么，它的逆矩阵仍是三角形矩阵.

第四章　线性方程组

在第三章里我们介绍了对方程组的增广矩阵施用初等行变换来求解方程组的方法，这是一个简便实用的方法。现在可以这样说，对于未知量及方程的个数都已给定的方程组来说，我们已经会用简便的方法求解了，并且在求出解来以后，还知道方程组的解有三种情况：有的方程组有唯一解；有的方程组有无穷多个解（如第三章第十一节例 2 和例 3）；有的方程组无解（同上例 4）然而这样还不够，因为现代科学技术常常要求在求出解之前，就能知道解的情况如何，或者只需要知道解的情况，而无须求出解本身。这样就给我们提出新的任务：要对一般的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

讨论下面的理论问题：

1．方程组(1)有解的条件是什么？

2．(1)有解时，有多少个解？

3．(1)在有无穷多个解时，怎样求出全部的解？

并且要求这些条件仅仅与组(1)本身（即它的系数与常数项直接有关）．

大家将看到，在解决上述理论问题中，矩阵的秩及克莱姆法则起到了主要的作用．但是讨论还须从用初等变换解方程组这一方法（即消元法）开始。

第一节　进一步讨论用初等变换解线性方程组的方法

将线性方程组(1)的系数矩阵记为

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2}$$

增广矩阵记为

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \tag{3}$$

1．用初等行变换及互换两列的位置化矩阵为标准阶梯形。

在上一章的第十三节中我们曾指出过，任何矩阵都可经过初等变换化为标准形。这一结论在此处仍然成立。但对于解方程组来说，不必将矩阵化为标准形这样一种过于简单的形式，而只需化成标准阶梯形就够用了。当然，根据上一章指出过的结论，任何一个矩阵经过初等行变换及两列互换位置一定可以化为下面的标准阶梯形(4)。分开来讲就是：系数

矩阵(2)可以经过一些初等行变换及两列位置互换化为下面的形状

$$\begin{bmatrix} 1 & 0\cdots 0 & C_{1r+1}\cdots C_{1n} \\ 0 & 1\cdots 0 & C_{2r+1}\cdots C_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0\cdots & C_{rr+1}\cdots C_{rn} \\ 0 & 0\cdots 0 & 0\cdots\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0\cdots 0 & 0\cdots\cdots 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

增广矩阵(3)用与A同样的初等变换便可化为下面的形状

$$\begin{bmatrix} 1 & 0\cdots 0 & C_{1r+1}\cdots C_{1n} & d_1 \\ 0 & \cdots\cdots 0 & C_{2r+1}\cdots C_{2n} & d_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0\cdots 1 & C_{rr+1}\cdots C_{rn} & d_r \\ 0 & 0\cdots 0 & 0\cdots\cdots 0 & d_{r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0\cdots\cdots 0 & 0\cdots\cdots\ 0 & d_m \end{bmatrix} \tag{5}$$

矩阵(4)与(5)分别称为矩阵(2)与(3)的标准阶梯形。

例 1　线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+x_4=1 \\ 2x_1+4x_2-5x_3-x_4=1 \\ 3x_1+6x_2-9x_3+3x_4=4 \\ 3x_1+6x_2-9x_3+3x_4=7 \end{cases}$$

系数矩阵

$$
A=\begin{bmatrix} \overset{x_1}{1} & \overset{x_2}{2} & \overset{x_3}{-3} & \overset{x_4}{1} \\ 2 & 4 & -5 & -1 \\ 3 & 6 & -9 & 3 \\ 3 & 6 & -9 & 3 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[\substack{(3)\text{行}-3(1)\text{行}\\(4)\text{行}-3(1)\text{行}}]{(2)\text{行}-2(1)\text{行}}
\begin{bmatrix} \overset{x_1}{1} & \overset{x_2}{2} & \overset{x_3}{-3} & \overset{x_4}{1} \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{(1)\text{行}+3(2)\text{行}}
\begin{bmatrix} \overset{x_1}{1} & \overset{x_2}{2} & \overset{x_3}{0} & \overset{x_4}{-8} \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[\text{互换位置}]{(2)\text{列与}(3)\text{列}}
\begin{bmatrix} \overset{x_1}{1} & \overset{x_3}{0} & \overset{x_2}{2} & \overset{x_4}{-8} \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

最后面的矩阵就是(4)的形状．利用和上面同样的初等变换就把增广矩阵 $\bar{A}$ 化成(5)的形状：

$$\bar{A}=\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -5 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & -9 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 3 & 7 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\xrightarrow[\substack{(3)\text{行}-3(1)\text{行} \\ (4)\text{行}-3(1)\text{行}}]{(2)\text{行}-2(1)\text{行}} \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\xrightarrow{(1)\text{行}+3(2)\text{行}} \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\xrightarrow[\text{互换位置}]{(2)\text{列与}(3)\text{列}} \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -8 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

注意 (i) 这个例子中所用的初等变换只包括初等行变换及两列互换位置，而没有用到全部的初等列变换。读者不难想到对于任何别的矩阵也都可以这样做。

(ii) 在矩阵 A 和 $\bar{A}$ 的上面标上了 x_1, x_2, x_3, x_4 与

列相对应，并且在交换两列位置时，对应的未知量也随着交换位置．为什么要这样做呢？由于交换系数矩阵A的两列相当于调换与列对应的两个未知量（如例1中的x_2与x_3）．为了记住是哪些未知量调换成什么位置，所以要这样记一下．但是读者就会明白，这样做只是为了理论叙述上的需要，至于在实际求解方程组时是不必要的，这一点我们将在本节的例2中加以说明．

2．根据增广矩阵$\bar{A}$的标准阶梯形来看线性方程组的解的情况．

设方程组(1)的增广矩阵(3)已经用上述方法化成标准阶梯形(5)．矩阵(5)对应的线性方程组是

$$\begin{cases} x_{i1} \qquad\qquad + C_{1,r+1}x_{i,r+1}+\cdots+C_{1n}x_{in}=d_1 \\ \quad x_{i2} \qquad\quad + C_{2,r+1}x_{i,r+1}+\cdots+C_{2n}x_{in}=d_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad x_{ir}+C_{r,r+1}x_{i,r+1}+\cdots+C_{rn}x_{in}=d_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0=d_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0=d_m \end{cases} \tag{6}$$

其中$x_{i,1}$，$x_{i,2}$，x_{ir}，$x_{i,r+1}$，$\cdots x_{in}$表示未知量调换位置以后又重新编号．如例1中x_2与x_3互换位置，x_1与x_4位置不变，那么就记为$x_{i1}=x_1$，$x_{i2}=x_3$，$x_{i3}=x_2$，$x_{i4}=x_4$，意思就是：在调换位置的新顺序中，x_1是第一个，x_3是第二个，x_2是第三个，x_4是第四个．

由于矩阵(5)是从矩阵(3)经初等行变换及互换两列位置而得到的，所以只要考虑到并记住了因为两列位置互换而引

起的未知量位置的变化，那么就可以说方程组(1)与方程组(6)是同解方程组. 于是要想知道组(1)的解的情况，只需要知道组(6)的解的情况就可以了. 因为组(6)具有足够简单的形状，所以关于组(6)的解的情况显然具有下面的结论：

1° 当 $r=n$ 时，组(6)有唯一解.

因为矩阵的秩不能超过矩阵的行数和列数，数 r 实际上就是矩阵 A 的秩数，所以 $r\leqslant n$，$r\leqslant m$. 当 $r=n$ 时，组(6)的实际形状是

$$\begin{cases} x_{i_1}=d_1 \\ x_{i_2}=d_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_{i_n}=d_n \end{cases} \tag{7}$$

方程组(7)显然是有解的，且解是唯一的. 同时(7)本身就给出了这个唯一解.

2° 当 $r<m$(并且 $r\leqslant n$) 而 $d_{r+1},\cdots d_m$ 中至少有一个不等于零时，组(6)无解. 因为这时组(6)中至少有一个矛盾方程.

3° 当 $r<m$ 而 d_{r+1}，…，d_m 全等于零时，组(6)有无穷多个解. 因为这时组(6)可以化为下面的形状

$$\begin{cases} x_{i_1}=d_1-C_{1,r+1}x_{i,r+1}-\cdots-C_{1n}x_{in} \\ x_{i_2}=d_2-C_{2,r+1}x_{i,r+1}-\cdots-C_{2n}x_{in} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{ir}=d_r-C_{r,r+1}x_{i,r+1}-\cdots-C_{rn}x_{in} \end{cases} \tag{8}$$

任意给定 $x_{i,r+1}$，$\cdots x_{in}$ 一组数值 $x_{i,r+1}=k_{r+1}$，…，$x_{in}=k_n$，由(8)便确定 x_{i_1}，x_{i_2}，…，x_{ir} 一组数值，将这 n 个数值合并

起来便得到组(6)的一个解：

$$\begin{cases} x_{i1} = d_1 - C_{1,r+1}k_{r+1} - \cdots - C_{1n}k_n \\ x_{i2} = d_2 - C_{2,r+1}k_{r+1} - \cdots - C_{2n}k_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{ir} = d_r - C_{r,r+1}k_{r+1} - \cdots - C_{rn}k_n \\ X_{i,r+1} = k_{r+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_{in} = k_n \end{cases} \quad (9)$$

因为 $k_{r+1}\cdots k_n$ 可以取无穷多组数值，所以用这样的方法得到组(1)的无穷多个解；另一方面，组(6)的任一解都必须满足(8)。于是用上述方法便可得到(6)的全部解。正因为(8)与(6)的全部解之间有着如此直接的关系，所以我们常把(8)式叫做组(6)也就是组(1)的一般解。将 $x_{i,r+1}$，…，x_{in} 称为自由未知量。可以说，线性方程组的全部解和一般解是一回事。

上面的三点结论完全可以从组(6)的增广矩阵(5)看出，再根据组(1)与组(6)的同解关系，我们就可以把三点结论中的组(6)改为组(1)，其余叙述完全不变，结论仍然成立。

注意：在一般解(8)中，每一个式子的右端只能含有常数项和自由未知量，而左端只能有“非自由未知量”。这一点不要搞错了。

例 2 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 \qquad - x_4 = -3 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 - 9x_3 - 5x_4 = -21 \end{cases}$$

解：对增广矩阵施用初等行变换：

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & 5\\ 2 & 4 & 0 & -1 & -3\\ -1 & -2 & 3 & 2 & 8\\ 1 & 2 & -9 & -5 & -21\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{(3)行+(1)行\\(4)行-(1)行}]{(2)行-2(1)行}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & 5\\ 0 & 0 & -6 & -3 & -13\\ 0 & 0 & 6 & 3 & 13\\ 0 & 0 & -12 & -6 & -21\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{(4)行+2(2)行\\最后用\frac{1}{3}乘(2)行}]{(3)行-(2)行}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 2 & 1 & \frac{13}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

（注意：到这一步已能知道原方程组有无穷多个解）

$$\xrightarrow{(1)行-(2)行}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 2 & 1 & \frac{13}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

因为 $r=2$，$n=4$，$r<n$，所以原方程组有无穷多个解。从最后的标准阶梯形矩阵可直接得到一般解：

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} - 2x_2 - x_3 \\ x_4 = \frac{13}{3} - 2x_3 \\ x_2,\ x_3 \text{ 为自由未知量} \end{cases}$$

练　习　一

1. 什么是标准阶梯形矩阵？怎样利用它讨论方程组的解的情况？怎样利用它求出方程组的一般解（在方程组有无穷多个解时）？

2. 什么是方程组的一般解？为什么可以说线性方程组的全部解和一般解是一回事？

第二节　线性方程组有解的判别法则

上一节介绍的判断方法，虽然能够在求出解之前判别方程组的解的情况，但是它的不足之处是未能把条件与方程组自身的情况直接联系起来。我们在这一节继续解决这个问题。

一、从标准阶梯形矩阵(4)和(5)中出现的整数 r 入手。

把方程组（1）的系数矩阵 A 和增广矩阵 $\bar{A}$ 用相同的初等变换化成标准阶梯形(4)和(5)时，在(4)和(5)中出现的 r 是同一个整数。我们已经看到这个 r 很重要，让我们再深入地分析它的作用。

第一，r 在讨论组(1)的解的情况时，起到了关键作用。因为根据 r 与未知量个数 n，方程个数 m 关系，以及 $d_{r+1}, \cdots$，

d_m 是否全等于零，便可以知道组(1)的解的情况。

第二，r 显然就是矩阵(4)的秩，因为由(4)的前 r 行前 r 列的元素组成的子式

$$\triangle_r=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}\neq 0$$

而任何 $r+1$ 阶子式都至少包含一个零行，从而所有的 $r+1$ 阶子式全为零．在矩阵(5)中看，r 可能是(5)的秩，也可能比(5)的秩小 1，此外不可能有第三种情况．这是因为在 $\triangle_r$ 的基础上增加常数列所得的 $r+1$ 阶子式为

$$\triangle_t=\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & d_1\\ 0\cdots 1 & & \cdots & 0 & d_2\\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & d_r\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_t\end{vmatrix}=d_t\quad(r+1\leqslant t\leqslant m)$$

显然(5)的任何 $r+2$ 阶子式全为零。所以当 $d_{r+1}\cdots d_m$ 全为零时，(5)的秩就等于 r；当 d_{r+1}，…，d_m 不全为零时，就有某一个 $r+1$ 阶子式 $\triangle_t\neq 0$，这时(5)的秩等于 $r+1$。

因为初等变换不改变矩阵的秩，所以 r 就是组(1)系数矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩，而增广矩阵 $\bar{A}$ 的秩等于 r 或者 $r+1$ 。

第三，在第三章中，矩阵的秩是用行列式定义的，而行列式是可以从方程组的系数矩阵与增广矩阵直接排列得出的。

这样看来，我们只要从上一节得出的结论出发，把整数

r 转化为矩阵 A 的秩，把 r 与 d_{r+1}，…，d_m 是否全为零，等情况转化为矩阵 $\bar{A}$ 的秩，再把矩阵的秩转化为矩阵的子行列式，最后就能把判别方程组的解的情况的结论同由方程组自身能直接看出的行列式联系起来，这便是我们所需要的法则。

二、线性方程组有解的判别法则：线性方程组有解的充分必要条件是：它的系数矩阵和增广矩阵有相同的秩。

证：用 $\bar{A}$ 表示线性方程组(1)的增广矩阵

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

那么 $\bar{A}$ 的前 n 列组成的矩阵就是(1)的系数矩阵 A。

利用初等变换把 $\bar{A}$ 化为

$$\bar{C}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots 0 & C_{1,r+1} \cdots C_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 \cdots 0 & C_{2,r+1} \cdots C_{2n} & d_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \cdots 1 & C_{r,r+1} \cdots C_{rn} & d_r \\ 0 & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & d_{r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & d_m \end{bmatrix} \qquad (5)$$

并且用 C 表示 $\bar{C}$ 的前 n 列所组成的矩阵，那么根据初等变换不改变矩阵的秩，得到

$$A\text{的秩}=C\text{的秩}=r, \qquad \bar{A}\text{的秩}=\bar{C}\text{的秩}$$

现在来证充分性，即从A的秩$=\bar{A}$的秩出发，推得方程组(1)有解。

设A的秩$=\bar{A}$的秩$=r$，r只可能有下面两种情况：$r=m$、或$r<m$，分别来证。

当$r=m$时，$\bar{C}$的实际形状是

$$\bar{C}=\begin{bmatrix} 1 & 0\cdots 0 & C_{1r+1}\cdots C_{1n} & d_1 \\ 0 & 1\cdots 0 & C_{2r+1}\cdots C_{2n} & d_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0\cdots 1 & C_{mr+1}\cdots C_{mn} & d_m \end{bmatrix}$$

此时，组(1)显然是有解的

当$r<m$时，由假设A的秩$=\bar{A}$的秩$=r$可以知道，必有$d_{r+1}\cdots d_m$全等于零（见上一段的讨论），根据第一节的结论，此时组(1)有解。

总之，如果A的秩$=\bar{A}$的秩，那么组(1)有解。

再来证明必要性，即从组(1)有解出发，推得A的秩$=\bar{A}$的秩。

设(1)有解，把$\bar{A}$化为$\bar{C}$后，r只可能有两种情况，$r=m$或者$r<m$，下面分别来证：

当$r=m$时，显然C的秩$=m$，$\bar{C}$的秩$=m$，即C的秩$=\bar{C}$的秩：

因为　A的秩$=C$的秩，$\bar{A}$的秩$=\bar{C}$的秩

所以得到A的秩$=\bar{A}$的秩。

当$r<m$时，因为(1)有解，所以不能有矛盾方程。即$\bar{C}$中的d_{r+1}，…，d_m必须全等于零，此时有C的秩$=r$，$\bar{C}$的秩$=r$，

所以 C的秩 = $\bar{C}$的秩。由此得

A的秩 = $\bar{A}$的秩

总之，如果组(1)有解，则A的秩 = $\bar{A}$的秩。

例 1　下面的线性方程组是否有解？

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+x_4=1, \\ 2x_1+4x_2-5x_3-x_4=1, \\ 3x_1+6x_2-9x_3+3x_4=4, \\ 3x_1+6x_2-9x_3+3x_4=7. \end{cases}$$

解：经过计算，系数矩阵A中最高阶不为零的子行列式是

$$\triangle_2=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}=1$$

所以A的秩 = 2，但在增广矩阵$\bar{A}$中有一个三阶子式

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -9 & 4 \end{vmatrix}=1$$

所以$\bar{A}$的秩 = 3，因为$\bar{A}$的秩 ≠ A的秩，所以此方程组无解。

注意，我们在解此例时，利用行列式来计算A与$\bar{A}$的秩主要是利用行列式的形式与方程组的直接关系，来形象说明判别法则与方程组自身的直接联系，有着重要的理论意义。但在实际解方程组时，为了计算方便，还是用初等变换求矩阵的秩为好。(本例参看上一节的例 1，二者是同一个方程组)。

三、线性方程组有解时，解的个数判别法则：设线性方程组(1)的系数矩阵和增广矩阵有相同的秩r，那么当r等于方程组(1)的未知量的个数n时，方程组(1)有唯一解；当

$r<n$ 时，方程组(1)有无穷多个解：

只要把第一节中关于解的个数的结论陈述一下，并把其中的 r 说成是矩阵的秩，即可得到本段的法则。

四、线性方程组的公式解

设方程组(1)有解，且系数矩阵A的秩$=r$，这时A中至少有一个 r 阶非零子式△，不妨设△位于前 r 行前 r 列。即

$$\triangle=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2r} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{r1} & a_{r2} \cdots a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

如果 $r=n$，那么(1)同解于方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \qquad (1')$$

由于$\triangle\neq0$，根据克莱姆法则，$(1')$有唯一解，并且可用公式表示它的解(略)

如果 $r<n$，那么(1)同解于方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1r}x_r+a_{1r+1}x_{r+1} \\ \qquad +\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2r}x_r+a_{2r+1}x_{r+1} \\ \qquad +\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rr}x_r+a_{rr+1}x_{r+1} \\ \qquad +\cdots+a_{rn}x_r=b_r. \end{cases}$$

将每一方程中左边的后$n-r$个项移至右端，得

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1r}x_r=b_1-a_{1,r+1}x_{r+1} \\ \qquad -\cdots-a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2r}x_r=b_2-a_{2,r+1}x_{r+1} \\ \qquad -\cdots-a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{rr}x_1+a_{rr}x_2+\cdots+a_{rr}x_2=b_r-a_{r,r+1}x_{r+1} \\ \qquad -\cdots-a_{rn}x_n. \end{cases} \tag{1''}$$

对于(1″)，因为系数行列式$\triangle\neq0$，根据克莱姆法则也有"唯一解"，可用公式表示如下：

$$x_j=\frac{\triangle_j}{\triangle},\quad j=1、2\cdots r$$

其中

$$\triangle j=\overset{j\text{ 列}}{\begin{vmatrix} a_{11}\cdots b_1-a_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{1n}x_n\cdots a_{1r} \\ a_{21}\cdots b_2-a_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{2n}x_n\cdots a_{2r} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}\cdots b_r-a_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{rn}x_n\cdots a_{rr} \end{vmatrix}}$$

而x_{r+1}，x_{r+2}，…，x_n可任意取值。

因为x_{r+1}，…，x_n可任意取值，所以（1″）的"唯一解"实际上是无穷多个解。这个公式解就是一般解。

给出方程组的公式解，主要是想阐明方程组的解的表达式也与方程组本身有直接的联系，并不是要求用这个公式求出一般解，求一般解的实用方法，仍然是消元法。

例 2　试问λ取何值时，下面的线性方程组有解？有多少解？如果是有无穷多个解，并求出一般解：

$$
\begin{cases}
x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\
-3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = 1, \\
-x_1 + x_2 \qquad\quad - x_4 - x_5 = 0, \\
-x_1 + 2x_2 + 4x_3 + \lambda x_5 = 2\lambda + 3.
\end{cases}
$$

解：先求A与$\bar{A}$的秩

$$
\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & \lambda & 2\lambda+3 \end{bmatrix}
$$

方程组中$m=4$，$n=5$，$\bar{A}$的前五列组成系数矩阵A。因为前三行前三列的子式

$$
\triangle = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3
$$

所以知道A的秩$\geqslant 3$，要想知道A的秩是否等于4，按定义须计算A的所有4阶子式是否全等于零，本例共有五个4阶子式，计算量太大。为了计算简便，我们不加证明的引用一个定理：若A有一个r阶子式$\triangle \neq 0$，而$\triangle$所有的加边子式都等于零，那么矩阵A的秩等于r。所谓$\triangle$的加边子式，就是在$\triangle$的基础上增加一行和一列所组成的$r+1$阶子式。显然$\triangle$的加边子式只是A的所有$r+1$阶子式的一部分，因此前者的计算量比后者较小。本例中，$\triangle$的加边子式在A中只有下面两个，它们是在$\triangle$的基础上增加第4行，同时分别增加第4与第5列组成的：

$$\triangle_1=\begin{vmatrix}0&1&4&1\\-3&2&-1&-1\\-1&1&0&-1\\-1&2&4&0\end{vmatrix}=0,$$

$$\triangle_2=\begin{vmatrix}0&1&4&1\\-3&2&-1&2\\-1&1&0&-1\\-1&2&4&\lambda\end{vmatrix}=-3\lambda$$

所以，当 $\lambda=0$ 时，A的秩 $=3$，当 $\lambda\neq0$ 时，A的秩 $=4$，为了计算$\bar{A}$ 的秩，只需注意到在$\bar{A}$ 中$\triangle$只有一个与A中不同的加边子式，那就是在$\triangle$的基础上增加第 4 行及常数列所形成的子式：

$$\triangle_3=\begin{vmatrix}0&1&4&2\\-3&2&-1&1\\-1&1&0&0\\-1&2&4&2\lambda+3\end{vmatrix}=-3(2\lambda+1)$$

当 $\lambda=0$ 时，$\triangle_3=-3$，$\bar{A}$的秩 $=4$

当 $\lambda\neq0$ 时，虽然在 $\lambda=-\frac{1}{2}$时，$\triangle_3=0$，但$\triangle_2\neq0$，

显然$\triangle_2$是$\bar{A}$中的一个 4 阶子式，所以仍有$\bar{A}$的秩 $=4$，

综上所述得：

当 $\lambda=0$ 时，A的秩 $=3$，$\bar{A}$的秩 $=4$，方程组无解．

当 $\lambda\neq0$ 时，A的秩 $=4=m$（此时必有A的秩 $=\bar{A}$ 的秩）方程组有解，因为秩 $=4<5=n$，所以方程组有无穷多个解．怎样求出一般解呢？一般是用初等变换法来解决．并且利用

初等变换法也能进行上面的讨论，所以下面我们利用初等变换法，把对本例的方程组的讨论及具体求出一般解一并进行。

增广矩阵的初等行变换不再具体标出，读者是不难看出的。

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & \lambda & 2\lambda+3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & \lambda & 2\lambda+3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -9 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 2\lambda+1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 2\lambda+1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 2\lambda+1 \end{bmatrix}$$

当 $\lambda=0$，$2\lambda+1=1$。最后一行对应一个矛盾方程此时方程组无解

$$\xrightarrow{\text{当 } \lambda\neq 0}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -2 & -6 & -2\\ 0 & 1 & 0 & -3 & -7 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2+\dfrac{1}{\lambda}\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 10+\dfrac{6}{\lambda}\\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 12+\dfrac{7}{\lambda}\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1-\dfrac{2}{\lambda}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2+\dfrac{1}{\lambda}\end{bmatrix}$$

综合起来便得到:

当 $\lambda=0$ 时，方程组无解。

当 $\lambda\neq 0$ 时，方程组有无穷多个解，此时选 x_4 作为自由未知量，从最后的标准阶梯形矩阵直接得出方程组的一般解是

$$\begin{cases}x_1=10+\dfrac{6}{\lambda}+2x_4\\ x_2=12+\dfrac{7}{\lambda}+3x_4\\ x_3=-1-\dfrac{2}{\lambda}-x_4\\ x_5=2+\dfrac{1}{\lambda}\end{cases}$$

其中 x_4 是自由未知量。

练　习　二

1．判断下列线性方程组是否有解？若有解，求出全部解。

(1) $$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1 \\ 3x_1-2x_2+2x_3-3x_4=2 \\ 5x_1+x_2-x_3+2x_4=-1 \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=4 \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=1 \\ 2x_1+2x_2+2x_3-x_4=1 \\ 5x_1+5x_2+2x_3=2 \end{cases}$$

2．试问λ取何值时，下列线性方程组有解？并求出一般解。

$$\begin{cases} x_1-2x_2-2x_3=0 \\ 2x_1-4x_2-2x_3-x_4=\lambda \\ x_1-2x_2+2x_3-2x_4=\lambda^2 \\ 3x_1-6x_2+2x_3-4x_4=\lambda^3 \end{cases}$$

第三节　齐次线性方程组

在这一节我们简单地讨论线性方程组：

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0
\end{cases}
\tag{9}
$$

组(9)是组(1)的特殊情况，我们把(9)叫齐次线性方程组，把(1)叫非齐次线性方程组.

关于组(1)成立的法则，自然对组(9)也成立．然而对组(9)使用另外的说法，显得更好一些．组(9)总是有解的，因为 n 个数零 $x_1=0$，$x_2=0$，…，$x_n=0$ 就是(9)的一个解，这个解叫零解或平凡解．于是对组(9)来说，主要的问题是有几个解的问题：如果(9)只有一个解，那就意味着(9)仅有零解；如果(9)有无穷多个解，那就意味着(9)有非零解．因此不论是组(9)自身的讨论，还是实际问题对组(9)的要求，主要的问题就是在什么条件下，组(9)有非零解？

这个问题不难解决．从上一节第三段中解的个数的判别法则可以得到下面的结论：

一、齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是：它的系数矩阵的秩 r 小于未知量个数 n.

二、组(9)为特殊形状时，有非零解的判别法：

1. 如果齐次线性方程组的未知量个数等于方程的个数，那么它有非零解的充分必要条件是，它的系数行列式等于零.

2. 如果齐次线性方程组方程的个数 m 小于未知量的个数 n，那么它必有非零解.

例 1　试问 λ 取何值时，下面的齐次线性方程组有非

零解？

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 \qquad\quad - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 \qquad\quad + \lambda x_4 = 0 \end{cases}$$

解：求矩阵A的秩

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

从最后的矩阵可以看出：当 $\lambda \neq 0$ 时，A 的秩 $=4=$ 未知量的个数，方程组仅有零解；当 $\lambda=0$ 时，A 的秩 $=3<$ 未知量的个数．故当 $\lambda=0$ 时，方程组有非零解．

例 2　试判断下面的齐次方程组是否有非零解：

$$\begin{cases} x_1-2x_3+x_3-x_4=0 \\ 2x_1-x_2+2x_3+x_4=0 \\ 3x_1-4x_2+2x_3-3x_4=0 \\ x_2+x_3+3x_4=0 \end{cases}$$

$|A|=0$

解：因为系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=3\cdot(2-2)=0$$

所以方程组有非零解。

例 3 试问当 λ 取何值时，下面的齐次线性方程组有非零解？

$$\begin{cases}(\lambda^2+1)x_1-2x_2+4x_3=0\\ \lambda x_1+(\lambda^2+2)x_2-x_3=0\end{cases}$$

解：显然方程个数 $m=2$，未知量个数 $n=3$，因为 $m<n$。所以不论 λ 取什么数值，方程组都有非零解。

例 4 在例 1 的齐次线性方程组中，令 $\lambda=0$，试求出它的一般解

解：求齐次线性方程组的一般解与求非齐次线性方程组的一般解的方法是相同的，并且只要对齐次线性方程组的系数矩阵 A 施用初等行变换即可．利用例 1 中 A 变换后的结果，并令 $\lambda=0$，就有

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -1 & -1\\ 2 & 3 & 1 & 4\\ 2 & 4 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1 & -3\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

从最后的矩阵可以直接得到方程组的一般解：

$$\begin{cases}x_1=-2x_4\\ x_2=x_4 \qquad (x_4\text{ 为自由未知量})\\ x_3=-3x_4\end{cases}$$

注意，在上面三节里，我们讨论了求线性方程的精确解的理论和方法．在实际问题中提出的线性方程组的方程及未知量个数往往都很大，利用上述方法求精确解所需的计算量是很大的．另一方面，在实际问题中常常不需要线性方程组的精确解，而只需要具有一定精确度的近似解就够用了．求

近似解的方法又叫数值解法。线性方程组的数值解法有好多个，如主元素消去法，迭代法等都是行之有效的，它们都可以在计算数学的有关书籍中找到。

练　习　三

1．判断下列齐次线性方程组是否有非零解：

(1) $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$

2．求出下列齐次线性方程组的两个不同的非零解：

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + 11x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

3．试问 λ 取何值时，下列齐次线性方程组有非零解？并求出一般解。

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$

第四节　n 维向量

一、n 维向量的概念

我们在学习平面解析几何的时候，遇到过平面上的几何向量，一个几何向量就是一条带方向的线段．为了更有效地研究它们，我们在平面上取定一个直角坐标系，随之在几何向量 α 与有序二实数组 (x,y) 之间建立了一一对应的关系，然后就把对几何向量 α 的讨论全部转化为对 (x,y) 的讨论，并记 $\alpha=(x,y)$，称 x，y 为向量 α 在 x 轴和 y 轴上的分量．因此我们很自然地把有序二实数组本身叫做向量，把实数 x 叫第一分量，实数 y 叫第二分量．因为 (x,y) 只有两个分量，同时 x 和 y 都是实数，所以叫二维实向量．为了适应性更强，去掉 x 和 y 为实数的限制，亦即分量 x 和 y 可以取复数的 (x,y) 叫二维向量．总之所谓二维向量就是有序二数组 (x,y)，它是从平面几何向量抽象出来的．

同理，从立体几何向量抽象出来三维向量，一个三维向量就是一个有序三数组 (x,y,z)，其中 x，y，z 分别称为第一，第二，第三分量，它们可以取复数．

物理学中的力、速度、加速度和电场强度等，它们既有大小又有方向，不能只用一个数表示，这种量叫向量．而几何向量正是上述向量的抽象．由此推知，二维向量和三维向量可以代表几何以外许多的向量．

然而只有二维和三维向量还是很不够的．因为在科学技术领域和国民经济中还有许许多多的量，它们都需要用更多个有顺序的数才能确定．

举一个简单的例子，比如半径为 r 的一个球在空间中的位置，需要四个有顺序的数才能确定：球心坐标三个数 x，y，z 和球半径 r，这就是有序四数组 (x,y,z,r)

在国民经济问题中，比如要想说明一个生产队或一个农户收入的详细情况，可以列出一个表：

顺序	1	2	3	4	5	6	7	8
项目	夏粮	秋粮	棉花	油料	蔬菜	西瓜	副业	其它
收入（元）	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8

表中项目的多少可根据对详细程度的要求来确定。为了把这个详细收入表示得更简单一些，我们约定按表中所规定的顺序来计算，那么这个详细收入就可表为下面的一个有序八数组

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8)$$

这类例子是不胜枚举的。

依此类推，不论是需要多少个（只要是有限多个）有顺序的数（实数或复数）才能确定的量，作为它们共同的抽象，便得到 n 维向量的概念：

定义 1　由 n 个数（实数或复数）$a_1,a_2,\cdots a_n$ 组成的有序数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 称为一个 n 维向量，a_i 称为该向量的第 i 个分量 $(i=1,2,\cdots,n)$

这里的 n 可以是任何一个有限的正整数，比如 $n=2$，$n=3$，$n=10000$ 等。当 $n=2$，3 而且 a_i 为实数时就是几何

向量，当$n>3$时，n维向量就失去了几何意义，无法用图形表示。因此初学n维向量，特别是在后面将要遇到的n维向量的线性关系时，常常感到抽象，不好掌握。如果读者能清楚地知道n维向量最初是从几何向量一步一步抽象出来的，并且把几何向量当作n维向量的重要的特殊情形，运用"共性寓于特性之中"的规律，在以后逐步深入的讨论中，一方面多多用几何向量来验证和启发，另一方面充分发挥想象和推理的作用，就能有效地克服学习这一部分的困难，并且逐步培养起抽象思维和逻辑推理的能力。

以后，我们习惯上用字母α，β，γ，$\delta\cdots$表示n维向量。

n维向量通常写成一行：

$$\alpha=(a_1,a_2,\cdots a_n)$$

有时也可以写成一列：

$$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\cdots\\a_n\end{pmatrix}$$

为了区别起见，把前者称为行向量，后者称为列向量。但要注意，这种区别只是n维向量在写法上的不同，亦即形式上的不同，比如三维向量$(1,2,3)$和$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$实际上是同一个三维向量。

还要注意，由n维向量的表示式，读者自然联想到上一章的矩阵，它们有相似之处。是的，一个n维行向量可以看成一个$1\times n$矩阵，一个n维列向量可以看成一个$n\times 1$矩阵；反过来看也可以。但是要清楚向量与矩阵之间本质的不同：n

维向量的实质是 n 个有顺序的数，因此可以排成行或排成列；矩阵的实质则是按行与列两个方面确定的一张“表”。比如（1，2，3）与 $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ 作为向量看是一个向量，但作为矩阵看则是两个不同的矩阵，虽然如此，我们仍然可以在形式上将向量和矩阵之间互相转化；这样做的好处，以后会看到。

n 维向量是从许多量的共性抽象出来的概念，反过来，我们用这一概念能够更准确、更简捷的理解和表示下面几个例子中出现的事物

（1）具有 n 个未知量的任何一个方程式

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$$

的系数全体组成一个 n 维向量 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$。全体系数和常数项则组成一个 $n+1$ 维向量 $(a_1,a_2,\cdots,a_n,\ b)$ 按照双方确定的顺序，该方程式便可用该 $n+1$ 维向量确定，反过来，一个 $n+1$ 维向量按上述的约定便可得到一个 n 元一次方程式。

（2）n 个未知量的线性方程组的任何一个解 $x_1=c_1$，$x_2=c_2$，$\cdots$，$x_n=c_n$ 构成一个 n 维向量 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 这里的顺序就是未知量编号的原顺序。

（3）如果把一个 m 行 n 列的矩阵

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

的全部元素排成一个向量．比如从左到右，从上到下地一个一个地排列起来，构成一个 mn 维向量

$$(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}\cdots, a_{2n}, \cdots a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn})$$

因此一个 $m\times n$ 矩阵可以看成一个 mn 维向量。特别，一个 n 阶方阵可以看成一个 n^2 维向量。

读者可以从科学技术及日常生活中多构造出几个 n 维向量，这样是有好处的。

二．n 维向量的两种运算

现在我们只引进两种运算：一种是 n 维向量之间的加法，另一种是 n 维向量与数的乘法。

我们把一个 n 维向量写为行向量，如前所述，它就是一个 $1\times n$ 矩阵，（同样，或者把 n 维向量写成列向量，当作 $n\times 1$ 矩阵），于是我们就可以把矩阵的这两种运算的定义和性质，照搬到 n 维向量中来。另一方面，n 维向量作为几何向量的抽象，它的运算也可以从几何向量的运算中自然地引伸出来。这就是说，现在我们可以借助于矩阵与几何向量两个方面的运算及运算律，引进 n 维向量的两种运算及运算律。

1．n 维向量相等的定义　如果 n 维向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots a_n)$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 的对应分量都相等，即 $a_i=b_i$，$(i=1, 2, \cdots, n)$，就称这两个向量是相等的，记为 $\alpha=\beta$。

2．n 维向量加法的定义　设 $\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 和 $\beta=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 是两个任意的 n 维向量，那么称向量 $\gamma=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$ 是 α 与 β 的和，记为 $\gamma=\alpha+\beta$。

由定义直接可以推出向量的加法适合以下的规律：

（1）交换律：　$\alpha+\beta=\beta+\alpha$

（2）结合律：　$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$

3. 零向量的定义：分量全是零的向量(0,0,…,0)称为零向量，记为0。

4. 负向量的定义：设$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$是任意$n$维向量，那么称向量$(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$为向量$\alpha$的负向量并记为$-\alpha$。

$0=(0,0,\cdots,0)$；如果$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$那么$-\alpha=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$。比如，若$\alpha=(1,2,-3)$，那么$-\alpha=(-1,-2,3)$

显然，对于所有的向量α，都有

(1) $\alpha+0=\alpha$

(2) $\alpha+(-\alpha)=0$

利用负向量，我们可以定义向量的减法：

5. 向量减法的定义　所谓向量α减向量β，就是向量α加向量β的负向量$-\beta$，记为$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$。

6. 向量与数的乘法　设k是实数或复数，向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，那么称向量$(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$为向量$\alpha$与数$k$的乘积，记为$k\alpha$。

即$k\alpha=k(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$

由定义立即推出向量与数的乘法具有下面四条基本规律（其中α，β是任意向量，k，l为任意数）：

(1) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$。

(2) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$。

(3) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$。

(4) $1\alpha=\alpha$。

由(1)—(4)或由定义不难推出还有下面四条性质：

(1) $0\alpha=0$.（注意，等式左边的 0 是数 0，右边的 0 是向量 0，以后在这种场合要会区别.）

(2) $(-1)\alpha=-\alpha$.

(3) $k0=0$.

(4) 如果 $k\neq0$，$\alpha\neq0$，那么 $k\alpha\neq0$.

换句话说：如果向量 α 与数 k 的乘积是零向量，则要么 α 是零向量，要么 k 是数零，二者必居其一.

注意，以前，每当我们引进新的数的时候，总是讨论通常数的运算及运算律，是否对新的数也适用？这是很必要的.因为只有对这些新数的运算及运算律都讨论清楚了，我们才知道怎样使用这些新的数.现在对于 n 维向量这个新的量来说，我们也必须这样做.经过上面的定义和讨论，我们对 n 维向量的全体以及两种运算有了进一步的认识；这两种运算具有上述的八条基本规律.为了更集中地反映上述认识，我们常说：在全体 n 维向量中定义了满足上述八条性质的两种运算(向量加法及向量与数的乘法)就组成了一个（实或复）n 维向量空间，或简称为向量空间.

例如，元素是复数的全体 $m\times n$ 矩阵，按照矩阵的加法及矩阵与数的乘法，构成一个 mn 维复向量空间；

又如，分量是实数的全体二维向量，按照向量的加法及向量与实数的乘法，构成一个二维实向量空间；对应地说：平面上几何向量的全体按照几何向量的加法及几何向量与数的乘法，构成二维实向量空间，或简称为二维空间；仿此可说：立体几何向量的全体构成三维空间.有时就直接说，平面是二维空间，立体是三维空间，按这个逻辑推知，直线应该是一维空间.

三、n维向量的线性关系

在引进n维向量的概念与运算之后，我们开始讨论n维向量之间的关系：这种关系是通过它们之间的运算建立起来的，但是我们在n维向量中只引进了加法与数乘两种运算，因此，我们目前只研究由这两种运算建立起来的关系：在这个关系中，向量的“次数”总是1（因为向量之间还不能相乘），因而我们称这种关系为线性关系．线性关系是n维向量之间最基本、最常见的一种关系，在各个方面都有着广泛的应用．

先从几何向量的特殊情形说起．

大家知道，平面上任意两个向量$\alpha=(a_1,\ a_2)$，$\beta=(b_1,\ b_2)$只有两种关系：

(1) α与β共线，即有数k使$\alpha=k\beta(\beta\neq 0)$此时由$(a_1,a_2)=k(b_1,b_2)=(kb_1,kb_2)$推出

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=k$$

这就是说α与β的分量对应成比例．因此，两个向量共线，也可以说是“成比例”．

(2) α与β不共线，即没有任何数k，能使$\alpha=k\beta(\beta\neq 0,\ \alpha\neq 0)$

按照本段开始所述，在情形(1)，α与β有线性关系，习惯上称为α与β线性相关．在情形(2)，α与β没有线性关系，习惯上称之为α与β线性无关．

因为平面上任何三个向量α，β，γ之间，至少有一个向量（比如γ）能按照另外两个向量进行分解，即有数k、l能使$\gamma=k\alpha+l\beta$．所以我们说：平面上任何三个向量一定线性

相关．由此推知：平面上任意三个或三个以上的向量必定线性相关．

在三维几何空间中也有类似的结论：

三维几何空间中任何三个向量 α，β，γ 之间只可能有两种关系：

(1) α，β，γ 共面．此时其中至少有一个（比如 γ）能按照另外向量进行分解，即有数 k 与 l 能使 $\gamma = k\alpha + l\beta$，这时我们说 α，β，γ 线性相关．

(2) α，β，γ 不共面，此时 $\alpha \neq 0$，$\beta \neq 0$，$\gamma \neq 0$ 且其中任何一个向量均不能按照另外两个向量进行分解，这时我们说 α，β，γ 线性无关．

三维几何空间中任何四个或四个以上的向量必定线性相关．

共性寓于特性之中，在平面和三维几何空间中的这两种向量之间的关系，可以推广到 n 维向量空间中去：

1．一个向量被一组向量线性表示的定义：设 α，$\beta_1, \cdots, \beta_s$ $(s \geqslant 1)$ 是 n 维向量，如果有数 k_1，k_2，$\cdots$，k_s 能使

$$\alpha = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_s\beta_s$$

则称向量 α 能被向量组 β_1，β_2，$\cdots$，β_s 线性表示，有时也说成 α 是 β_1，β_2，$\cdots$，β_s 的线性组合．

显然，这个定义是平面或空间中一个向量能按照另外向量进行分解的推广．

2．线性相关与线性无关的定义：在向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ $(s \geqslant 2)$ 中如果有一个向量能被其余向量线性表示，则称这个向量组是线性相关的．否则（即是说 α_1，α_2，$\cdots \alpha_s$ 中没有任何一个向量能被其余向量线性表示），则称这个向量组是线

性无关的。在 $s=1$，即向量组只含有一个向量 α 的情形，这样定义：如果 $\alpha=0$，则称 α 线性相关，如果 $\alpha\neq 0$，则称 α 是线性无关的。

四、判断一个向量组是否线性相关的方法

先给出在简单情形下的判断方法：

（1）含有零向量的任何向量组必定线性相关，这是因零向量能被任何向量线性表示($0=0\alpha$)的原故。

（2）对于只含有两个n维向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 的向量组来说，当 α 与 β 的分量对应成比例，则 α 与 β 线性相关，否则就线性无关。

例如　$\alpha=(1,\ 2,\ 3)$，$\beta=(2,\ 4,\ 6)$

由 $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}$　知 α 与 β 线性相关。

而 $\alpha=(1,\ 2,\ 3)$，$\beta=(2,\ 4,\ 1)$线性无关，因为分量不成比例：$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}\neq\frac{3}{1}$

（3）在向量组 α_1，α_2，$\cdots\alpha_s(s\geqslant 2)$ 中，如果已知有一部分向量（比如 α_1,α_2）线性相关，那么整个向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 也线性相关。

这是因为 α_1，α_2 中至少有一个能被另一个线性表出，比如 $\alpha_1=k\alpha_2$，由此式得等式 $\alpha_1=k\alpha_2+O\alpha_3+O\alpha_4+\cdots+O\alpha_s$。

这表明 α_1 能被 α_2，α_3，$\cdots$，α_s 线性表出，故 α_1，$\alpha_2\cdots$，α_s 线性相关。特别，含有两个成比例向量的任何向量组必定线性相关。

例如　$\alpha_1=(1,\ 1,\ 1,\ 0)$，$\alpha_2=(3,\ -1,\ 7,\ -8)$，$\alpha_3=(10,\ 100,\ -99,\ -87)$，$\alpha_4=(-90,\ -90,\ -90,\ 0)$线性

相关，因为其中 α_1 与 α_4 成比例。

(4) 如果已知向量组 α_1，α_2，…，α_s 线性无关，那么其任何一部分向量都线性无关。

用反证法，不妨设前面 r 个向量（$r\leqslant s$）线性相关，依定义，再设 α_1 能被 α_2，α_3，…，α_r 线性表出，即有

$$\alpha_1 = k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_v$$

由这个等式立即可以得到

$$\alpha_1 = k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_v + O\alpha_{r+1} + \cdots + O\alpha_s$$

这就表明 α_1，α_2，$\cdots\alpha_s$ 线性相关。但原来已知 α_1，α_2，$\cdots$，α_s 线性无关，这就产生了矛盾，这个矛盾是由假设原向量组的前 r 个向量线性相关引起的，因此要想消除矛盾，就必须消除这个假设，也就是说，前 r 个向量应该是线性无关的。再回到一般情况就知道，原向量组的任何一部分向量都线性无关。

例如：因为 $\alpha_1=(1,1,1)$，$\alpha_2=(1,0,1)$，$\alpha_3=(0,1,1)$ 线性无关，所以 α_1，α_2，α_3 中的任何一个，或任何两个均线性无关。读者可自行验证。

再给出一般情形下的判断方法。分两步：

第一步，将线性相关的定义转化为便于计算的等价形式：向量组 α_1，α_2，…，α_s 线性相关的充分必要条件是，有不全为零的数 k_1，k_2，…，k_s 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0 \tag{1}$$

反过来也可以说：α_1，α_2，…，α_s 线性无关的充分必要条件是：(1)只有在 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$ 时才成立。

证明：先证必要性，即由 α_1，$\alpha_2\cdots$，α_s 按定义是线性相关的，证到有不全为零的数 k_1，k_2，…，k_s 使(1)成立。

设 α_1，α_2，…，α_s 线性相关，按定义，其中至少有一个向量，不妨设为 α_1 能被其余向量线性表出，即有数 k_2，k_3 …，k_s 使

$$\alpha_1 = k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + \cdots + k_s\alpha_s \qquad (2)$$

成立，(2)可改写为(1)的形式：

$$\alpha_1 - k_2\alpha_2 - k_3\alpha_3 - \cdots - k_s\alpha_s = 0$$

数 1，$-k_2$，$-k_3$，…，$-k_s$ 显然不全为零(∵第一个数 1 就不是零)．必要性得证

再证充分性，即从有不全为零的数 k_1，k_2，…，k_s 使(1)成立出发，推出 α_1，α_2，…，α_s 线性相关，这只需证明 α_1，α_2，…，α_s 中至少有一个向量能由其余向量线性表出．

设有不全为零的数 k_1，k_2，…k_s 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0 \qquad (1)$$

成立，因为 k_1，k_2，…，k_s 不全为零，不妨设 $k_1 \neq 0$，于是从(1)可解出 α_1．

$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \frac{k_3}{k_1}\alpha_3 - \cdots - \frac{k_s}{k_1}\alpha_s$$

这表明 α_1 能由 α_2，…，α_s 线性表出，按定义，α_1，α_2，…，α_s 线性相关．充分性得证．

只要注意到线性相关与线性无关是互相对立的两种关系，而关系式(1)中的 k_1，k_2，…，k_s 是不全为零，还是全为零，也是互相对立的两种条件，就可由已证明的结论前半部分来证明结论的后半部分．结论得证．

第二步，用求解齐次线性方程组的方法，判断向量组是否线性相关

设向量组
$$\begin{cases} \alpha_1 = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{n1}) \\ \alpha_2 = (a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{n2}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_s = (a_{1s}, a_{2s}, \cdots, a_{ns}) \end{cases} \tag{2}$$

都是 n 维向量，设有数 k_1，k_2，…，k_s（注意 这里并未假设它们是否不全为零）使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0 \tag{3}$$

将 α_i 的分量代入(3)

$$k_1(a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{n1}) + k_2(a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{n2}) + \cdots$$
$$+ k_s(a_{1s}, a_{2s}, \cdots, a_{ns}) = (0, 0, \cdots, 0)$$

按向量的数乘与加法，上式即为

$$(k_1a_{11} + k_2a_{12} + \cdots + k_sa_{1s}, k_1a_{21} + k_2a_{22} + \cdots + k_sa_{2s},$$
$$\cdots k_1a_{n1} + k_2a_{n2} + \cdots + k_sa_{ns}) = (0, 0, \cdots, 0)$$

再按向量相等的定义，即得

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1s}k_s = 0 \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{2s}k_s = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \cdots + a_{ns}k_s = 0 \end{cases} \tag{4}$$

这样就由(3)推出(4)，反之，由(4)按上述的逆过程便可推出(3).因此(3)与(4)是等价的.所以满足(3)式的数 k_1，$k_2, \cdots, k_s$ 正是齐次线性方程组(4)的解.(3)中的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 是否不全为零的问题，就转化为齐次线性方程组(4)是否有非零解的问题：如果(4)有非零解，那么 α_1，α_2，…，α_s 线性相关；如果(4)仅有零解，那么 α_1，α_2，…，α_s 线性无关.这便是判断向量组是否线性相关的一般方法.

例 1. 判断向量组 $\alpha_1=(2,1,0)$，$\alpha_2=(0,-2,1)$，$\alpha_3=(1,2,-1)$的线性相关性（即是线性相关，还是线性无关）。

解：设有数 k_1，k_2，k_3 使(1)成立，即

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$$

将分量代入经整理得(4)式，即

$$\begin{cases}2k_1 \qquad +k_3=0\\ k_1-2k_2+2k_3=0\\ \qquad k_2-k_3=0\end{cases}$$

因为这个齐次方程组的系数行列式 $=1\neq0$，所以关于 k_1,k_2，k_3 只有零解，故 α_1，α_2，α_3 线性无关。

例 2. 判断向量组 $\alpha_1=(5,2,1)$，$\alpha_2=(-1,3,3)$，$\alpha_3=(4,5,4)$的线性相关性。

解：设有数 k_1，k_2，k_3 使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0.$$

仿前题，得

$$\begin{cases}5k_1-k_2+4k_3=0\\ 2k_1+3k_2+5k_3=0\\ k_1+3k_2+4k_3=0\end{cases}$$

先求系数矩阵的秩，

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5&-1&4\\2&3&5\\1&3&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}5&-1&4\\17&0&17\\16&0&16\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}5&-1&4\\17&0&17\\0&0&0\end{bmatrix}$$

可知A的秩 = 2 < 未知量个数 3，于是齐次方程组有非零解，故 α_1，α_2，α_3 线性相关。

例 3. 证明 n 维单位向量 $e_1 = (1,0,0,\cdots 0)$，$e_2 = (0,1,0,\cdots,0)$，$\cdots e_n = (0,0,\cdots 1)$ 线性无关

证明：设 $k_1e_1 + k_2e_2 + \cdots + k_ne_n = 0$，即

$$k_1(1,0,\cdots 0) + k_2(0,1,0,\cdots 0) + \cdots + k_n(0,0,\cdots 1)$$
$$= (0,0,\cdots 0)$$

即 $(k_1,0,\cdots 0) + (0,k_2,\cdots 0) + \cdots + (0,0,\cdots k_n)$
$$= (0,0,\cdots 0)$$

即 $(k_1,k_2,\cdots,k_n) = (0,0,\cdots,0)$

由向量相等的定义知，$k_1 = 0$，$k_2 = 0$，$\cdots$，$k_n = 0$，所以 e_1，e_2，$\cdots$，e_n 线性无关。

例 4 证明若向量组 α_1，α_2，$\cdots$，α_s 都是 n 维向量，且 $s > n$，则 α_1，α_2，$\cdots$，α_s 线性相关。

证明：设有数 k_1，k_2，$\cdots$，k_s 值

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots k_s\alpha_s = 0. \qquad (1)$$

设 $\alpha_1 = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{n1})$ $\alpha_2 = (a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{n2}) \cdots$ $\alpha_s = (a_{1s}, a_{2s}, \cdots, a_{ns})$。

按照前面的方法，得关于 k_1，k_2，$\cdots k_s$ 的齐次线性方程组(4)，因为 $n < s$，即是方程个数 n 小于未知量个数 s，故(4)关于 k_1，k_2，$\cdots$，k_s 有非零解，所以 α_1，α_2，$\cdots$，α_s 线性相关。

比如，根据例 4 可知，多于两个的二维向量组一定线性相关；多于三个的三维向量组必定线性相关。

特别，任何 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关。

要求向量 β 被向量组 α_1 α_2 $\cdots$ α_n 线性表出的表达式，

也可以用线性方程组的方法解决，即设

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$$

由各向量的分量得出关于 k_1，k_2，$\cdots k_s$ 的非齐次线性方程组求得即可。

五、向量组线性关系的基本性质

如果向量组 α_1，α_2，$\cdots$，α_s 中每一个向量都是向量组 β_1，β_2，$\cdots$，β_t 的线性组合，且 $s>t$，则向量组 α_1，α_2，$\cdots$，α_s 线性相关。

证明：由假设，有（参看第一章关于连加符号）数 k_{ji} 使

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{t} k_{ji}\beta_j \quad (i=1,2,\cdots,S) \tag{3}$$

为了证明 α_1，α_2，$\cdots$，α_s 线性相关，只要能证明 α_1，α_2，$\cdots$，α_s 的线性组合

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = 0 \tag{4}$$

中的系数 x_1，x_2，$\cdots$，x_s 可以不全为零即可。将(3)代入(4)并根据连加符合的性质，得

$$\begin{aligned}
x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s &= \sum_{i=1}^{s} x_i\alpha_i \\
&= \sum_{i=1}^{s} x_i\left(\sum_{j=1}^{t} k_{ji}\beta_j\right) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} x_ik_{ji}\beta_j \\
&= \sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{s} x_ik_{ji}\beta_j = \sum_{j=1}^{t}\left(\sum_{i=1}^{s} k_{ji}x_i\right)\beta_j \\
&= 0。
\end{aligned} \tag{5}$$

要使(5)成立，只要 β_j 的系数全为零即可，把这些系数等于零的式子写出来就是关于 x_1，x_2，$\cdots$，x_s 的齐次线性方程

组：

$$\begin{cases} k_{11}x_1+k_{12}x_2+\cdots+k_{1s}x_s=0 \\ k_{21}x_1+k_{22}x_2+\cdots+k_{2s}x_s=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_{t1}x_1+k_{t2}x_2+\cdots+k_{ts}x_s=0 \end{cases} \quad (6)$$

由假设 $s>t$，即在组(6)中方程个数 $t<$ 未知量个数 s，所以(6)关于 x_1，x_2，…，x_s 有非零解，按上面证明过程倒推过去，这些不全为零的数值 x_1，x_2，…，x_s，便能使(4)成立，从而向量组 α_1，α_2，…，α_s 线性相关。

以后我们说：向量组 α_1，α_2，…，α_s 能被向量组 β_1，β_2，…，β_t 线性表出，指的是前一组的每一个向量都能被后一组线性表出。

基本性质可叙述为另一形式：能被向量个数较少的向量组线性表出的向量组必定线性相关。

基本性质也可以从反面来叙述：某向量组如果是线性无关的，那么它不能被任何所含向量比它少的向量组线性表出。

刚才给出的两种叙述，有助于对基本性质的重要意义的理解。

能够互相线性表出的两个向量组称为是等价的向量组。

由基本性质可直接推出下面的结论：

两个线性无关的等价向量组，必含有相同个数的向量。

证明：设向量组 α_1，α_2，…，α_s 与 β_1，β_2，…，β_t 是等价的，且都是线性无关的，要证明 $s=t$，可以分成两方面来证，即一方面 $s\leqslant t$，同时另一方面 $t\leqslant s$。

假设 $s\leqslant t$ 不成立，即 $s>t$。由于 α_1，α_2，…，α_s 能被

β_1，β_2，…，β_t 线性表出，再加上 $s>t$，那么根据基本性质推出 α_1，α_2，…，α_s 线性相关，这与结论中假设它为线性无关相矛盾。所以 $s\leqslant t$ 成立

同理可证 $t\leqslant s$ 成立。

因为 $s\leqslant t$ 与 $t\leqslant s$ 都要成立，所以就得到 $s=t$。

六、向量组的最大无关组

我们先给出最大无关组的定义，再讨论它的性质，介绍选取的方法，最后以方程组为例来说明它的意义。

最大无关组的定义：一向量组的一个部分组如果满足两个条件：(1)这个部分组本身是线性无关的。(2)从向量组中任意另取一个向量（如果还有的话）添到这个部分组，所得到的部分组都线性相关，那么称该部分组为原向量组的一个最大无关组。

例 5 $\alpha_1=(-1,\ -2,\ 1)$，$\alpha_2=(-1,0,1)$，$\alpha_3=(-2,\ -2,\ 0)$，$\alpha_4=(0,\ -2,\ 2)$ 是一个向量组，α_1，α_2 是它的一个部分组，可以算出，(1)α_1，α_2 本身线性无关。(2)从向量组中取 α_3 添到 α_1，α_2，所得的部分组 α_1，α_2，α_3 线性相关，再取 α_4 添加，所得到的部分组 α_1，α_2，α_4 也线性相关，此外再无向量可以添加，于是部分组 α_1，α_2 便是原向量组的一个最大无关组。同理可以判断部分组 α_1，α_3；α_1，α_4；α_2，α_3 等都是向量组的最大无关组。可见向量组的最大无关组是存在的，但不是唯一的。

由定义知，一个线性无关向量组的最大无关组就是这个向量组本身。

下面讨论最大无关组的性质。

最大无关组的基本性质：向量组与其任一个最大无关组

等价。

我们仅以例 5 来验证这个结论，从例 5 看，已知 α_1，α_2 是一个最大无关组，可以算出：

$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2$，显然还有 $\alpha_1=\alpha_1+0\alpha_2$，$\alpha_2=0\alpha_1+\alpha_2$，这表明，$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$，$\alpha_4$ 能被 α_1，α_2 线性表出，α_1，α_2 当然能被 α_1，α_2，α_3，α_4 线性表出。

$\alpha_1=\alpha_1+0\alpha_2+0\alpha_3+0\alpha_4$，$\alpha_2=0\alpha_1+\alpha_2+0\alpha_3+0\alpha_4$ 故，α_1，α_2，α_3，α_4 与 α_1，α_2 等价。同样可得 α_1，α_2，α_3，α_4 与其任何的最大无关组都等价。

从上述基本性质出发，再利用等价的传递性（即从甲向量组与乙向量组等价，乙向量组与丙向量组等价，可推出甲向量组与丙向量组等价，这叫向量组等价的传递性）可推出一个向量组的所有最大无关组都是两两等价的。

从例 5 看，α_1，α_2，α_3，α_4 的最大无关组虽然不是唯一的，但每一个最大无关组都恰好由两个线性无关的向量组成，就是说，每一个最大无关组所含向量个数相同，这是偶然的现象呢？还是必然的规律呢？其实只要注意到上一段末的结论，就知道这是必然的规律：一个向量组的所有最大无关组自身线性无关，并且两两等价，因此，它们所含向量个数相同。换句话说：每一个最大无关组所含向量的个数仅仅依赖于原向量组自身，而不随着最大无关组的改变而改变。这是最大无关组的一个更为深刻的性质，为了便于讨论使用，我们往往把它叙述为下面关于秩的定义：

向量组的秩的定义：向量组的任何一个最大无关组所含向量的个数称为该向量组的秩。

从定义知，如果已知向量组 α_1，α_2，…，α_s 的秩为 r，那

么从 α_1，α_2，…，α_s 中任意选出 γ 个线性无关的向量就组成它的一个最大无关组。

从定义还可知道，向量组线性无关的充分必要条件是它所含全部向量的个数等于它的秩数。

怎样有效地计算向量组的秩呢？下面介绍一个有效的方法。

设给出向量组

$$\begin{cases} \alpha_1=(a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n}) \\ \alpha_2=(a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n}) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \alpha_s=(a_{s1}, & a_{s2}, & \cdots, & a_{sn}) \end{cases} \tag{7}$$

把一个向量排成一行，可得一个矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}a_{s2}\cdots a_{sn} \end{bmatrix}$$

可以证明向量组(7)的秩等于矩阵A的秩（证明略），因为A的秩可用初等变换有效地计算，所以向量组（7）的秩也就能够有效地计算出来了。

例 6　判断向量组 $\alpha_1=(1, 1, 3, 1)$，$\alpha_2=(1,0,0,1)$，$\alpha_3=(1,-1,0,-1)$，$\alpha_4=(1,2,3,3)$ 是否线性相关？

解：将向量看成行得矩阵 A，进行初等变换求秩。

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}0&1&3&0\\1&0&0&1\\0&0&3&-2\\0&0&-3&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&3&0\\1&0&0&1\\0&0&3&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

可以看出A的秩$=3$，于是向量组的秩$=3$，小于它所含向量个数4，故该向量组线性相关.

下面举例说明怎样有效地求出向量组的一个最大无关组.

例7　试求例6中向量组α_1，α_2，α_3，α_4的一个最大无关组.

解：由例6知α_1，α_2，α_3，α_4的秩等于3，因此只要找出三个线性无关的向量就是它的一个最大无关组，因为A的前三行前三列的子式

$$\begin{vmatrix}1&1&3\\1&0&0\\1&-1&0\end{vmatrix}=-3$$

所以前三行（即$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$）线性无关.因此，$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$组成一个最大无关组.

注意，读者可能会想到：A经过初等变换后的最后一个矩阵的前三行显然就是它的一个最大无关组，那么，A的前三行也是A中四行的最大无关组，因此α_1，α_2，α_3就是α_1，α_2，α_3，α_4的一个最大无关组.这样判断对吗？应该说明：这样判断没有充分的根据，但我们做过的一些简单题目的结果却是正确的.读者应该记住，在简单的初等变换（如本例的情形，不包含交换两行的位置，另两种行初等变换作的也不多）时，这个判断可以用，但在复杂时就不能用了，而是

应该按照例 7 的方法去做，其原因是经过另两种行初等变换也能实现交换两行位置的作用，以致使矩阵在初等变换的前后不具备上述设想的直接关系，而必须用行列式计算 A 中到底是哪 r 个行线性无关。

前面已经讲过，向量组与其任何一个最大无关组等价，这说明了最大无关组的作用与意义：它是能完全代表原向量组的一个最小部分组。下面我们再以线性方程组进一步说明这一点。

例 8 试求线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3-x_4=2\\-x_1-2x_2-x_3+2x_4=-1\\3x_1+x_2+4x_3-3x_4=3\end{cases}$$

的同解方程组。

解：将每一个方程看成一个五维向量，那么所给方程组就转化为下面的向量组

$$\begin{cases}\alpha_1=(2,\ -1,\ 3,\ -1,\ 2)\\\alpha_2=(-1,\ -2,\ -1,\ 2,\ -1)\\\alpha_3=(3,\ 1,\ 4,\ -3,\ 3)\end{cases}$$

不仅如此，读者可以想到：向量的两种运算对应于方程组的初等变换。因此，向量组的线性关系对应于方程组的由初等变换所建立的关系，即同解的关系。不难求出向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一个极大无关组 α_1，α_2，因此与之对应的前两个方程的方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3-x_4=2\\-x_1-2x_2-x_3+2x_4=-1\end{cases}$$

就与原方程组同解。并且，这后面的方程组所含方程的个数2不能再减少了。

由此例我们可以体会到：

（1）如果向量组线性相关，那么与之对应的方程组就含有“多余的方程”（即去掉该方程并不影响方程组的解）。例8中由 $\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2$ 知

第三方程 =（第一方程）-（第二方程），亦即从第三方程减去第一方程再加上第二方程就得方程 $0x_1+0x_2+0x_3+0x_4=0$，这个方程显然是可以去掉的，所以第三方程是可以去掉的，即是“多余的方程”。

当然，从另一方面说：如果向量组线性无关，那么与之对应的方程组中就没有“多余的方程”。

（2）如果一个向量组与一个线性方程组相对应，那么该向量组任一最大无关组就与该线性方程组的一个同解的且方程个数最少的方程组相对应。

在上面一至六段中，我们讨论了 n 维向量的概念，运算及重要性质等基本内容。在以下两段中，我们借助于 n 维向量这个工具，进一步讨论线性方程组的解的性质，作为本节的结束。

七、齐次线性方程组的解的性质、基础解系

设齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0 \end{cases} \tag{8}$$

有非零解，也就是有无穷多个解，现在我们指出这些解具有下面的性质。

（1） 组(8)的任何两个解的和，仍是(8)的解。

设 $\alpha=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 和 $\beta=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 是(8)的任意两个解，即适合(8)中每一个方程：

$$a_{i1}c_1+a_{i2}c_2+\cdots+a_{in}c_n=0 \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ s.$$

$$a_{i1}d_1+a_{i2}d_2+\cdots+a_{in}d_n=0 \quad i=1,\ 2,\cdots,s.$$

两式各项对应相加得

$$a_{i1}c_1+a_{i1}d_1+a_{i2}c_2+a_{i2}d_2+\cdots+a_{in}c_n+a_{in}d_n=0 \quad (i=1,2,\cdots,s)$$

整理即得

$$a_{i1}(c_1+d_1)+a_{i2}(c_2+d_2)+\cdots+a_{in}(c_n+d_n)=0 \quad (i=1,2,\cdots,s)$$

这说明 n 个数 c_1+d_1，c_2+d_2，$\cdots$，c_n+d_n 适合 (8) 中每一个方程，即两解之和 $\alpha+\beta=(c_1+d_1,\ c_2+d_2,\ \cdots,c_n+d_n)$ 仍是(8)的解。

（2） 组(8)任何一个解与任何一个数的乘积仍是(8)的解。

设 $\alpha=(c_1,c_2\cdots,c_n)$ 是(8) 的任一解，k 为任一个数，因为 $a_{i1}c_1+a_{i2}c_2+\cdots+a_{in}c_n=0$ $(i=1,2,\cdots n)$，所以 $a_{i1}(kc_1)+a_{i2}(kc_2)+a_{in}(kc_n)=k(a_{i1}c_1+a_{i2}c_2+\cdots+a_{in}c_n)=0$

这说明 n 个数 kc_1，kc_2，$\cdots$，kc_n 仍是(8)的解，即解 α 与 k 的数积 $k\alpha=(kc_1,kc_2,\cdots,kc_n)$ 仍是(8)的解

从(1)与(2)不难推知：如果 α_1，α_2，$\cdots\alpha_m$ 是 (8) 的任意 m 个解，k_1，k_2，$\cdots$，k_m 是任意 m 个数，那么所有的线性组合 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$ 都是(8)的解。

这启发我们进一步想：(8)的无穷多个解能不能被(8)的

某几个解线性表出呢？如果这几个解是线性无关的，那就更好了，因为线性无关就意味着它们不能被更少数的解线性表出，从而就是“最基本的几个解”了。把这个想法更明确、更集中一些，就得出基础解系的概念。

关于基础解系的定义：组(8)的 t 个解如果满足两个条件：(1)这 t 个解本身是线性无关的；(2)(8)的任何解都能被这 t 个解线性表出，那么就称这 t 个解是组(8)的一个基础解系。

注意，如果把(8)的所有解（在有无穷多个解的情况下）当作一个向量组，那么(8)的一个基础解系就相当于这个向量组的一个最大无关组。另一方面，因为(8)的解具有(1)和(2)两条性质，实际上就是在(8)的全体解的集合中能够进行加法和数乘两种运算；而解就是 n 维向量，所以本节第二段中所述的(1)—(8)性质自然满足。这就是说把(8)的全体解作为全体 n 维向量中的一部分向量，那么这一部分向量对于加法与数乘具有 n 维向量空间所要求的全部条件，因此我们常把齐次线性方程组(8)的全部解叫做组(8)的解空间。这个解空间含有无穷多个解向量，而通常所说的向量组只含有有限多个向量，由于这个原故，我们在(8)的解空间中起到最大无关组的作用的那 t 个解叫做(8)的一个基础解系。

根据上面的讨论，当组(8)有非零解时，求出(8)的一般解与求出(8)的一个基础解系是等价的；但为了更直接一些，我们对齐次线性方程组通常是要求出一个基础解系（如果有的话）。

当组(8)仅有零解时，(8)没有基础解系，因为这时(8)根本就没有线性无关的解。

关于基础解系有下面的重要结论：

齐次线性方程组（8）有基础解系的充分必要条件是它的系数矩阵的秩 $r<n$，当 $r<n$ 时，（8）的基础解系不是唯一的，但每一个基础解系恰好由 $n-r$ 个无关解组成。

下面我们举例说明这个结论，同时给出求基础解系的方法。

例 9　求解齐次线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3-x_4=0\\-x_1-2x_2-x_3+2x_4=0\\3x_1+x_2+4x_3-3x_4=0\\x_1-3x_2+2x_3+x_4=0\end{cases}$$

解：先算系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&3&-1\\-1&-2&-1&2\\3&1&4&-3\\1&-3&2&1\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}0&-5&1&3\\-1&-2&-1&2\\0&-5&1&3\\0&-5&1&3\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}0&-5&1&3\\-1&-2&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}0 & -5 & 1 & 3\\ -1 & -7 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}0 & -5 & 1 & 3\\ 1 & 7 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

从最后的矩阵可以看出 A 的秩 $=2<4=n$，所以方程组有基础解系，且每一基础解系由 $4-2=2$ 个线性无关解组成。下面来求它的一个基础解系；先从最后的标准阶梯形矩阵写出方程组的一般解 $\begin{cases}x_1=-7x_2+5x_4\\ x_3=5x_2-3x_4\end{cases}$（$x_2$、$x_4$ 为自由未知量），

第一次取 $x_2=1$，$x_4=0$，得 $x_1=-7$，$x_3=5$，得解 $\alpha_1=(-7,1,5,0)$。第二次取 $x_2=0$，$x_4=1$，得 $x_1=5$，$x_3=-3$，得解 $\alpha_2=(5,\ 0,\ -3,\ 1)$ 可以证明，这样得到的两个解 α_1，α_2 一定是线性无关的（证略）故 $\alpha_1=(-7,\ 1,\ 5,\ 0)$，$\alpha_2=(5,\ 0,\ -3,\ 1)$ 便是所给齐次线性方程组的一个基础解系。

注意：例中依次取一个自由未知量1，而其余自由未知量均取零的方法，很易掌握。但除此以外还有多种取值法，这里不再讨论了。从例9可以看出，对于一个齐次线性方程组来说，当有自由未知量的时候，取哪些未知量作为自由未知量，不是唯一的，当取定一组自由未知量时，如何取自由未知量的值以得到 $n-r$ 个线性无关的解，方法也不是唯一的，所以方程组的基础解系不是唯一的。比如在本例的一般

解中，第一次取$x_2=\frac{1}{7}$，$x_4=0$，得$x_1=-1$，$x_3=\frac{5}{7}$，得解

$\alpha_3=(-1,\ \frac{1}{7},\ \frac{5}{7},\ 0)$。

第二次取$x_2=0$，$x_4=\frac{1}{5}$，得$x_1=1$，$x_3=-\frac{3}{5}$，

得解$\alpha_4=(1,\ 0,\ -\frac{3}{5},\ \frac{1}{5})$。同理$\alpha_3$，$\alpha_4$也线性无关，因此，

α_3，α_4也是方程组一个基础解系。如此等等。

一般情况下，如果α_1，α_2，…，α_t是组（8）的一个基础解系，那么当k_1，k_2，…，k_t取遍所有的数值，线性组合$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t$就给出组（8）的全部解。因此也可以说$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t$就是组(8)的一般解(或通解)。

八、非齐次线性方程组的解的性质

设　非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s \end{cases} \tag{9}$$

及其对应的（即系数矩阵相同的）齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0 \end{cases} \tag{10}$$

我们指出它们的解之间的性质：

（1）　组(9)的任何两个解之差是(10)的解

设 $\alpha=(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 和 $\beta=(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 是(9)的任意两个解，即它们适合(10)中每一个方程。

$$a_{i1}c_1+a_{i2}c_2+\cdots+a_{in}c_n=b_i \quad (i=1,2,\cdots,s)$$

$$a_{i1}d_1+a_{i2}d_2+\cdots+a_{in}d_n=b_i \quad (i=1,2,\cdots,s)$$

此二式各项对应相减，并整理得

$$a_{i1}(c_1-d_1)+a_{i2}(c_2-d_2)+\cdots+a_{in}(c_n-d_n)$$

$$=b_i-b_i=0$$

$$(i=1,2\cdots,s)$$

这表明 n 个数 c_1-d_1，c_2-d_2，$\cdots$，c_n-d_n 适合组(10)中每一个方程，即两解之差 $\alpha-\beta=(c_1-d_1,c_2-d_2,\cdots,c_n-d_n)$ 是(10)的解。

(2) 组(9)的任一解与(10)的任一解之和仍是(9)的解。

设 $\alpha=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 是(9)的任一解，$\gamma=(e_1, e_2,\cdots, e_n)$ 是(10)的任意一个解，即有等式组：

$$a_{i1}c_1+a_{i2}c_2+\cdots+a_{in}c_n=b_i \quad (i=1,2\cdots,s)$$

$$a_{i1}e_1+a_{i2}e_2+\cdots+a_{in}e_n=0 \quad (i=1,2\cdots,s)$$

二项相加，并整理，得

$$a_{i1}(c_1+e_1)+a_{i2}(c_2+e_2)+\cdots+a_{in}(c_n+e_n)$$

$$=b_i+0=b_i \quad (i=1,2,\cdots,s)$$

这表明 n 个数 c_1+e_1，c_2+e_2，$\cdots$，c_n+e_n 是(9)的解，即二解之和 $\alpha+\gamma=(c_1+e_1,c_2+e_2,\cdots,c_n+e_n)$ 是(9)的解。

(3) 非齐次线性方程(9)的一般解与对应的齐次线性方程组(10)的一般解之间的关系，设 γ_0 是(9)的一个特解，η 是(10)的一般解（或通解），那么 $\gamma=\gamma_0+\eta$ 是(9)的一般解（或通解）。或者说：设 γ_0 是(9)的一个特解，η_1，η_2，$\cdots$，η_t 是(10)的一个基础解系，k_1，$k_2,\cdots,k_t$ 是 t 个任意数，那么

线性组合 $\gamma=\gamma_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t$ 是(9)的一般解（或通解）。

注意，这里讲的通解或一般解与本章第二节中讲的一般解，实质上是一样的。它们都含有同样多的可以任意取值的变数，并且可以直接得出方程组的所有解。

下面举例说明。

例 10　试用本段的方法（即用基础解系）求解下列线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3-x_4=1\\-x_1-2x_2-x_3+2x_4=-1\\3x_1+x_2+4x_3-3x_4=2\\x_1-3x_2+2x_3+x_4=0\end{cases}$$

解：本例方程组对应的齐次方程组就是例 9 中的齐次方程组。

先对例中的方程组的增广矩阵进行初等行变换

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}2&-1&3&-1&1\\-1&-2&-1&2&-1\\3&1&4&-3&2\\1&-3&2&1&0\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}0&-5&1&3&-1\\-1&-2&-1&2&-1\\0&-5&1&3&-1\\0&-5&1&3&-1\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix} 0 & -5 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix} 0 & -5 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & -7 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix} 0 & -5 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 7 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从最后矩阵可以看出本例方程组的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 7x_2 + 5x_4 \\ x_3 = -1 + 5x_2 - 3x_4 \end{cases} \quad x_2,\ x_4 \text{ 为自由未知量} \tag{11}$$

令 $x_2 = x_4 = 0$ 解出 $x_1 = 2, x_3 = -1$ 得一个特解 $\gamma_0 = (2, 0, -1, 0)$，对应的齐次方程组的一般解为（只需在(11)中去掉两个常数项）

$$\begin{cases} x_1 = -7x_2 + 5x_4 \\ x_3 = 5x_2 - 3x_4 \end{cases}$$

得一个基础解系 $\eta_1 = (-7, 1, 5, 0)$，$\eta_2 = (5, 0, -3, 1)$.（参看例 9），于是本例线性方程组的通解便是

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 \\ &= (2, 0, -1, 0) + k_1(-7, 1, 5, 0) + k_2(5, 0, -3, 1) \end{aligned}$$

其中 k_1，k_2 可任意取值.

注意，若把通解 γ 的表达式再整理一下，便得到

$$\gamma=(2,0,-1,0)+(-7k_1,k_1,5k_1,0)$$
$$+(5k_2,0,-3k_2,k_2)$$
$$=(2-7k_1+5k_2,\ k_1,\ -1+5k_1-3k_2,\ k_2)$$

即 γ 的第一分量 $=2-7k_1+5k_2$,

第二分量 $=K_1$,

第三分量 $=-1+5k_1-3k_2$,

第四分量 $=k_2$。

读者可以将上述形式与例10中求得的一般解相比较，不难发现，它们实际上是一样的。

不论怎样，本段性质(3)指出了线性方程组与齐次线性方程的解之间的联系，在理论上以及在其它学科中都有重要的意义和应用。

练 习 四

1. n 维向量与方程式、矩阵之间有怎样的对应关系?

2. 求解下列各题:

(1) 设 $\alpha_1=(1,-1,5,0)$, $\alpha_2=(2,3,-1,-6)$, $\alpha_3=(0,-3,4,1)$, $\alpha_4=(7,1,0,2)$. 试计算

$$2\alpha_1-3\alpha_2+\alpha_4.$$

(2) 求满足等式:

$$3(\alpha_1-\alpha)+2(\alpha_2+\alpha)=5(\alpha_3+\alpha)$$

的向量 α, 其中 $\alpha_1=(2,5,1,3)$, $\alpha_2=(10,1,5,10)$, $\alpha_3=(4,1,-1,1)$。

3. 在 $n=2,3$ 时，解释向量组线性相关与线性无关的几何意义，并举例说明。

4. 判断下列向量组的线性关系:

$$(1)\begin{cases}\alpha_1=(2,-1,5,15)\\ \alpha_1=(1,3,-1,4)\\ \alpha_3=(1,-4,6,11)\\ \alpha_4=(3,9,-3,13)\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases}\alpha_1=(3,2,1)\\ \alpha_2=(-3,5,1)\\ \alpha_3=(6,1,3)\end{cases}$$

$$(3)\begin{cases}\alpha_1=(1,0,\lambda)\\ \alpha_1=(0,1,2)\\ \alpha_3=(-1,4,0)\end{cases}\qquad (\lambda\text{为参数})$$

5. 根据线性关系的基本性质，你对向量组的线性相关与线性无关，有些什么进一步的认识？

6. 求下列向量组的秩及一个最大无关组

$$(1)\begin{cases}\alpha_1=(1,4,1,0)\\ \alpha_1=(2,1,-1,-3)\\ \alpha_3=(1,0,-3,-1)\\ \alpha_4=(0,2,-6,3)\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases}\alpha_1=(3,1,2,5)\\ \alpha_2=(1,1,1,2)\\ \alpha_3=(2,0,1,3)\\ \alpha_4=(1,-1,0,1)\\ \alpha_5=(4,2,3,7)\end{cases}$$

7. 求下列齐次线性方程组的基础解系

(1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 6x_1 - 3x_2 + 9x_3 + 6x_4 = 0 \\ 8x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

8. 用基础解系表示下列线性方程组的通解：

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

本 章 提 要

一、本章的主要内容是线性方程组有解的判别法则，实际有效的解法，齐次线性方程组的基础解系，n 维向量的线性相关性等有关基本知识。

二、用初等变换求解线性方程组的方法称为消元法，它是一个有效的实用解法，可在电子计算机上使用，要求读者熟练掌握。这一方法的主要缺点是：没有说明解的情况与方程组自身的直接联系，因而不能满足某些理论上的需要。

三、一个线性方程组完整地、集中地反映到它的增广矩阵 $\bar{A}$ 及系数矩阵 A 上。线性方程组有解的判别法则，只用 A 与 $\bar{A}$ 的秩和未知量个数 n 之间的关系，而 $\bar{A}$ 与 A 的秩又等于

其最高阶非零子行列式的阶数．这样一来，判别法则就把解的情况（就是 $\bar{A}$ 与 A 的子行列式的情况）同线性方程组自身（就是 $\bar{A}$ 与 A 自身）直接地联系起来了，从而弥补了消元法在理论上的不足．

当线性方程组有无穷多个解的时候，要求写出它的一般解．一般解就是所有的非自由未知量分别仅用自由未知量表示的一组式子．由这组式子可直接得出方程组的任何解，故一般解实际上就是全部解．

四、齐次线性方程组总是有解的（因为它至少有一个零解），它的问题仅是有没有非零解的问题，对于它来说，下列三种说法是等价的：

1．有非零解．

2．有无穷多个解．

3．有基础解系．

要会求一般解或基础解系（在有基础解系的时候），这二者是等价的．但更多的情况下是要求出一个基础解系．

五、n 维向量是从几何、数学、物理、工程等等很多领域中抽象出来的，是应用十分广泛的一个重要工具．n 维向量的线性相关与线性无关的概念是个难点．建议读者在学习这一部分时，第一要密切联系平面与空间解析几何中的例子，以增强感性认识；第二要动脑筋，多思考，熟记定义和性质，多做习题反复体会，以培养抽象思维与逻辑推理的能力．

习　　题

1．用消元法求解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ \qquad x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 \qquad - 3x_4 = 1 \\ \quad -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = b \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = c \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = d \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ x_2 - x_4 = 1 \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 2 \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 2 \\ -x_3 + x_5 = 0 \\ -x_4 + x_6 = 0 \end{cases}$

2. λ为何值时下面的方程组有解？并解出.

(1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$

3. 计算 $3(1,0,1,4)+(2,1,3,0)-\frac{1}{2}(4,1,0,3)=?$

4. 试求出一个向量α，使下列等式成立：

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha = 0$$

其中 $\alpha_1=(5,-8,-1,2)$，$\alpha_2=(2,-1,4,3)$，$\alpha_3=(-3,2,-5,4)$

5. 判断下列各向量是否线性相关：

(1) $\alpha_1=(1,2,3)$，$\alpha_2=(3,6,7)$，

(2) $\alpha_1=(4,-2,6)$，$\alpha_2=(6,-3,9)$，

(3) $\alpha_1=(2,-3,11)$，$\alpha_2=(3,-1,5)$，$\alpha_3=(1,-4,3)$，

(4) $\alpha_1=(4,-5,2,6)$，$\alpha_2=(2,-2,1,3)$，
$\alpha_3=(6,-3,3,9)$，$\alpha_4=(4,-1,5,6)$.

6. 试将向量β用α_1，α_2，α_3线性表出：

(1) $\beta=(5,3,-5,3)$，$\alpha_1=(4,2,-6,2)$，
$\alpha_2=(6,3,-9,3)$，$\alpha_3=(1,1,1,1)$.

(2) $\beta=(6,4,-2,-10)$, $\alpha_1=(1,1,0,5)$,

$\alpha_2=(2,4,2,2)$, $\alpha_3=(-1,1,2,3)$.

(3) $\beta=(1,0,0,2,4)$, $\alpha_1=(0,1,0,3,-1)$,

$\alpha_2=(0,0,1,-2,5)$, $\alpha_3=(2,-3,1,-7,-1)$.

7. 选取λ的值，使向量β能用向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出：

(1) $\beta=(3,9,\lambda)$, $\alpha_1=(2,3,5)$,

$\alpha_2=(-1,3,7)$, $\alpha_3=(1,6,12)$.

(2) $\beta=(\lambda,9,13)$, $\alpha_1=(2,3,5)$,

$\alpha_2=(-1,3,7)$, $\alpha_3=(1,6,10)$.

8. 计算下列各矩阵的秩，并指出一组最大无关行和一组最大无关列。

(1) $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 8 \\ -9 & -3 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & 9 & 2 \\ 8 & -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & 9 & 6 \\ 8 & -4 & 7 & 7 \end{bmatrix}$

(4) $A=\begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 & 6 \\ 15 & 21 & 9 & 18 \\ 5 & 7 & 4 & 6 \\ 10 & 14 & 5 & 12 \end{bmatrix}$

9. 对λ讨论下列矩阵的秩

(1) $A=\begin{bmatrix}4-\lambda & 6 & 0\\ -3 & -5-\lambda & 0\\ -3 & -6 & 1-\lambda\end{bmatrix}$

(2) $B=\begin{bmatrix}3-\lambda & 1 & 0 & 0\\ -14 & -1-\lambda & 0 & 0\\ 7 & 1 & 2-\lambda & 1\\ -17 & -6 & -1 & -\lambda\end{bmatrix}$

10. 利用矩阵的秩判定下列各向量组是否线性相关，并且指出一个最大无关组

(1) $\begin{cases}\alpha_1=(1,2,3,4)\\ \alpha_2=(1,3,2,1)\\ \alpha_3=(1,-1,1,3)\\ \alpha_4=(0,0,0,1)\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\alpha_1=(1,-1,1,-1)\\ \alpha_2=(1,2,1,2)\\ \alpha_3=(5,1,5,1)\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\alpha_1=(1,0,1,0,3)\\ \alpha_2=(0,2,3,1,0)\\ \alpha_3=(3,2,1,0,0)\\ \alpha_4=(1,4,7,2,3)\end{cases}$

(4) $\begin{cases}\alpha_1=(9,0,0,6)\\ \alpha_2=(8,1,0,3)\\ \alpha_3=(7,8,13,17)\\ \alpha_4=(6,9,13,14)\end{cases}$

11．判断下列各线性方程组是否有解？有多少个解？

(1) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=-1 \\ 2x_1+x_2-2x_3=1 \\ x_1+x_2-2x_3=3 \\ x_1+2x_2-3x_3=1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4 \\ \qquad x_2-x_3+x_4=-3 \\ x_1+3x_2 \qquad -3x_4=1 \\ \quad -7x_2+3x_3+x_4=-3 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-4x_4=1 \\ x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=-1 \\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5=3 \\ x_1-4x_2+x_3+2x_4-x_5=3 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=-1 \end{cases}$

12．λ 取何值时，下面的方程组有唯一解，无穷多解或无解？

$$\begin{cases} \lambda x_1+\lambda x_2+(\lambda+1)x_3=\lambda \\ \lambda x_1+\lambda x_2+(\lambda-1)x_3=\lambda \\ (\lambda+1)x_1+\lambda x_2+(2\lambda+3)x_3=1 \end{cases}$$

13．试问：$\begin{cases} (1,-2,1,0,0) \\ (1,-2,0,1,0) \\ (0,0,3,-2,0) \\ (1,-2,3,-2,0) \end{cases}$

是不是齐次方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0\\\quad x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0\\5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0\end{cases}$

的一个基础解系，为什么？

14．求出下列齐次方程组的一般解和一个基础解系：

(1) $\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3+5x_4=0\\4x_1-2x_2+x_3+3x_4=0\\6x_1-3x_2+9x_3+2x_4=0\\8x_1-5x_2-2x_3+x_4=0\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x_1-x_2+5x_3-x_4=0\\x_1+x_2-2x_3+3x_4=0\\3x_1-x_2+8x_3+x_4=0\\x_1+3x_2-9x_3+7x_4=0\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=0\\2x_4=0\\x_1-2x_2+x_3+x_4=0\\x_1-2x_2+x_3-x_4=0\end{cases}$

(4) $\begin{cases}3x_1-x_2+2x_3+4x_5=0\\6x_1-2x_2+x_3+3x_4+7x_5=0\\6x_1-2x_2+3x_3+x_4=0\end{cases}$

15．设向量 α_1、α_2、α_3 线性无关，求证：向量

$\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$也线性无关。

16. 设向量β可由向量α_1，α_2，…，α_r线性表出，但不能由α_1，α_2，…α_{r-1}线性表出，试证

(1) α_r不能由α_1，α_2，…α_{r-1}线性表出。

(2) α_r可以由α_1，α_2，…α_{r-1}，β线性表出。

第五章 二 次 型

在解析几何中，称具有对称中心的二次曲线为有心二次曲线，圆、椭圆和双曲线都是有心二次曲线。研究有心二次曲线的几何性质是平面解析几何的基本内容。当坐标系原点与一条有心二次曲线的对称中心相重合时，该二次曲线的方程一般是下面的形状

$$ax^2+2bxy+cy^2=f \tag{1}$$

其中 a，b，c，f 都是常数。从(1)的形式不易看出该二次曲线的几何特征，这时，可以选择一个适当的角度 θ，使坐标轴按反时针方向旋转 θ，以便使新坐标系的坐标轴与该二次曲线的对称轴相重合，从而使该二次曲线在新坐标系中的方程不再含有交叉乘积项。在这个变换的过程中，所用的转轴变换公式为

$$\begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta \end{cases} \tag{2}$$

其中 x，y 为曲线上的点在原坐标系下的坐标，x'，y' 则是该点在转轴后所得新坐标系的坐标。在新坐标系中，该两二次曲线的方程是

$$a'x'^2+b'y'^2=f \tag{3}$$

(3)叫该二次曲线的标准方程。从二次曲线的标准方程就可以直接看出它的几何特性。

例如，已知二次曲线在坐标系 oxy 中的方程是

$$13x^2+6\sqrt{3}\,xy+7y^2=16 \qquad (1')$$

为了讨论它的几何性质，我们要把(1′)化为标准方程，为此，我们将坐标轴沿逆时针旋转$-60°$、即沿顺时针旋转60°，坐标变换公式是

$$\begin{cases} x=x'\cos(-60°)-y'\sin(-60), \\ y=x'\sin(-60)°+y'\cos(-60°). \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}x'+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y', \\ y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x'+\dfrac{1}{2}y', \end{cases} \qquad (2')$$

将(2′)代入(1′)，经整理得

$$4x'^2+16y'^2=16$$

即

$$\frac{x'^2}{4}+y'^2=1 \qquad (3')$$

根据标准方式(3′)来看所给二次曲线的几何性质便一目了然：这是一椭圆，长、短半轴分别为2与1。

上述过程可概括为：对于一般方程(1)，选择适当的坐标变换(2)，将(1)化为标准方程(3′)。

丢开上面的几何意义，单从代数的观点来看，就是这样：(1)式左边是一个二次齐次多项式(即每一个项中变数的次数之和都等于2)；(2)式是由旧变数到新变数(即从x，y到x'，y')的一个变换，因为式中每一个变数的次数都等于1，所以就叫线性变换，这个变换完全被系数矩阵

$$A=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

所决定，而$|A|=\begin{vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，$A$是满秩矩阵，因此说得更准确一些，(2)就是一个从旧变数x，y到新变数x'，y'的满秩线性变换。(3)就是变数的平方和(即是只含平方项，而不含交叉乘积项的和式)。这样一来，用代数观点概括上述过程就是：对于二次齐次多项式(1)，选择一个适当的满秩线性变换(2)，将(1)化为平方和(3)。这样一种形式的代数问题，不但在解析几何的二次曲线和二次曲面中用到，而且在其它许多问题中也要用到。比如在多元函数极值问题及物理中刚体转动问题等都出现这种形式的问题。

二次齐次多项式习惯上称为二次型。

本章将介绍二次型的基本概念和性质，给出化二次型为平方和的两种常用方法：一个是用满秩线性变换化为平方和，另一个是用正交变换(是一种特殊的满秩线性变换)化为平方和的方法。后一种方法还要用到矩阵的特征值和特征向量以及向量的内积等，我们将一一介绍。

第一节 二次型的一般概念及矩阵表示

n个变数x_1，x_2，…，x_n的二次齐次多项式

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=&a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots\\&+2a_{1n}x_1x_n+a_{22}x_2^2+\cdots+2a_{2n}x_2x_n+\cdots\\&+a_{nn}x_n^2\end{aligned}\qquad(4)$$

称为x_1，x_2，…，x_n的二次型。有时不指明变数，而简称为二次型。例如

$$f = x_1^2 + 3x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 - x_3^2,$$
$$f = x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3,$$
$$f = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 3x_4^2$$

都是二次型。

为了讨论方便，在(4)中我们将 x_ix_j 项的系数写成 $2a_{ij}$。因为 x_ix_j 的系数记成 a_{ij}，而 x_jx_i 的系数记成 a_{ji}，但是 x_ix_j 与 x_ix_j 显然是相同的项，所以有等式 $a_{ij}=a_{ji}$，

即 $2a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i$，也就是说二次型(4)可以改写为

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots x_n) = & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $a_{ij}=a_{ji}$

比如 $f = x_1^2 + 3x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 - x_3^2$

$$= x_1^2 + \frac{3}{2}x_1x_2 - x_1x_3 + \frac{3}{2}x_2x_1 + 2x_2^2 + 0x_2x_3$$
$$- x_3x_1 + 0x_3x_2 - x_3^2$$

形式(4)与形式(5)表示同一个二次型。(5)可以用矩阵表示出来

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = [x_1x_2\cdots x_n]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

其中 $a_{ij}=a_{ji}$，比如

$$f = x_1^2 + 3x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_3^2 - x_3^2$$

$$=[x_1x_2x_3]\begin{bmatrix}1 & \frac{3}{2} & -1\\ \frac{3}{2} & 2 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

更进一步，我们令

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \cdots\\ x_n\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn}\end{bmatrix}\cdot\left(\because\ a_{ij}=a_{ji}\quad \therefore\ A'=A\right)$$

将(5)化为
$$f=X'AX \tag{6}$$
(6)称为二次型 f 的矩阵表示，其中 A 为对称矩阵，称为二次型的系数矩阵或简称二次型的矩阵。

比如，二次型 $f=x_1^2+3x_1x_2-2x_1x_3+2x_2^2-x_3^2$ 的矩阵是

$$A=\begin{bmatrix}1 & \frac{3}{2} & -1\\ \frac{3}{2} & 2 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$f=x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 的矩阵是

$$B=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & -1\\ \frac{1}{2} & 0 & 2\\ -1 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

$f=x_1^2+2x_2^2-x_3^2-3x_4^2$ 的矩阵是

$$C=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-3\end{bmatrix}$$

可以看出平方和的矩阵是对角形矩阵。

反过来看，任何一个对称矩阵，都对应着一个二次型。

比如 $A=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&2&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}$ 对应着二次型

$f=2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2^2-x_3^2$。但任何一个非对称矩阵 都 不能作为二次型的矩阵。

一组关系式

$$\begin{cases}x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n\\x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_n+\cdots+c_{nn}y_n\end{cases}\tag{7}$$

称为由变数 x_1，x_2，…，x_n 到 y_1，y_2，…，y_n 的线性变换，或简称为线性变换．如果系数行列式

$$\begin{vmatrix}c_{11}&c_{12}\cdots c_{1n}\\c_{21}&c_{22}\cdots c_{2n}\\\cdots\cdots&\cdots\cdots\\c_{n1}&c_{n2}\cdots c_{nn}\end{vmatrix}\neq 0$$

则称线性变换(7)是满秩(或非退化的)的线性变换，例如

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

是满秩线性变换，这是因为它的系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

注意，这里的线性变换是从 n 个 x 变到同样多的 n 个 y，既不能变多了，也不能变少了。这是实际问题所规定的。比如本章开始所举的例子中的二次曲线是平面上的曲线，经过线性变换(2)化简它的方程，但曲线仍在原来的平面上，这就要求所用的线性变换是从两个变数(相当于坐标)变到两个变数。实际问题总是希望能够通过变数的变换化简它的形式。但同时也要求是在原来范围内进行变换，这样才有意义。希望读者记住这一点。令

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \cdots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \cdots c_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ c_{n1} & c_{n2} \cdots c_{nn} \end{bmatrix}$$

则线性变换(7)可表示成为矩阵的形式

$$X = CY \tag{8}$$

我们想看一看二次型(5)经过线性变换(7)会发生什么变化。这只要看一看(6)经过(8)会有什么变化就可以了。把(8)代入(6)得

$$f = X'AX = (CY)'A(CY) = (Y'C')A(CY)$$
$$= Y'(C'AC)Y$$

因为 A 为对称矩阵，即 $A' = A$，所以矩阵 $c'Ac$ 的转置 $(C'AC)' = C'A'(C')' = C'AC$，即 $C'AC$ 也是对称矩阵。这就表明(6)经过变换(8)的作用后，变成以 $C'AC$ 为矩阵的变数 y_1，y_2，…，y_n 的二次型。

因为(8)是满秩的，即 C 为满秩矩阵，所以矩阵 A 与 $C'AC$ 的秩相等。这就是说，二次型系数矩阵的秩不因满秩线性变换而改变，因此我们把二次型的系数矩阵的秩称作二次型的秩。

可以认为，二次型最简单的一种是只含平方项的二次型：

$$d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2 \tag{9}$$

(9)式叫二次型的标准形或平方和形式(简称平方和)。

我们在本章的开始提出的问题就可以叙述为：用满秩线性变换把二次型化成标准形(即平方和)

例 1　试求二次型

$$f = -2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + x_3^2$$

的秩，并写出它经过线性变换

$$\begin{cases} x_1 = y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

后的形式。

解：把 f 写为矩阵形式

$$f=[x_1\ \ x_2\ \ x_3]\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ -1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

经计算系数矩阵A的秩 = 3，所以 f 的秩 = 3，

将变换各式代入 f

$$f=-2y_2(y_1-y_2)+4y_2y_3-(y_1-y_2)^2+y_2^3.$$

展开并整理得

$$f=-y_1^2+y_2^2+4y_2y_3+y^2$$

这就是 f 经线性变换后的形式，它是关于 y_1，y_2，y_3 的二次型，系数矩阵为 $B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$.

B 还可以这样求得：

因为 f 关于 x_1，x_2，x_3 的系数矩阵 $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ -1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$，

而由 x_1，x_2，x_3 到 y_1，y_2，y_3 的线性变换的系数矩阵是

$$C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

那么 f 关于 y_1，y_2，y_3 的系数矩阵 B 就是

$$B=C'AC=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ -1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&2\\-1&0&0\\0&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{bmatrix}$$

由 B 立即可写出二次型 $f=-y_1^2+y_2^2+4y_2y_3+y_3^2$。

练 习 一

1. 把二次型

$$f=2x_1^2-5x_1x_3-7x_2^2+3x_2x_3$$

表示为矩阵形式，并求出 f 的秩。

2. 二次型

$$f=x_1x_2-x_2x_3$$

经过满秩线性变换

$$\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1-y_2\\x_3=y_3\end{cases}$$

后，变为怎样的二次型？

第二节 用满秩线性变换化二次型为标准形

为了解决前面提出的问题，我们给出重要结论：任意一个二次型(4)都可经过满秩线性变换

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=D\begin{bmatrix}w_1\\w_2\\\vdots\\w_n\end{bmatrix}$$

变成平方和

$$f=d_1w_1^2+d_2w_2^2+\cdots+d_rw_r^2 \tag{10}$$

其中 r 是系数不等于零的平方项的个数，$r=f$ 的秩。

证明：下面的证明过程，实际上是一个具体地把二次型化为平方和的方法，就是中学代数里的"配方法"。

先证(4)中至少有一个平方项的情形，不妨设 $a_{11}\neq 0$，对含有 x_1 的所有项配成完全平方：

$$\begin{aligned}f&=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n\\&\quad+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+2a_{2n}x_2x_n\\&\quad+\cdots+a_{nn}x_n^2\\&=\frac{1}{a_{11}}(a_{11}^2x_1^2+2a_{11}a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{11}a_{1n}x_1x_n)\\&\quad+g(x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n)\\&=\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)^2\\&\quad-\frac{1}{a_{11}}(a_{12}^2x_2^2+\cdots+a_{1n}^2x_n^2)+g(x_2,x_3,\cdots,x_n)\\&=\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)^2\\&\quad+h(x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n)\end{aligned}$$

其中 $g(x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n)$ 与 $h(x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n)$

$=-\frac{1}{a_{11}}(a_{12}^2x_2^2+\cdots+a_{1n}^2x_n^2)+g(x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n)$ 都是 x_2, x_3, $\cdots$, x_n 的二次型，它们都不包含 x_1，这就是"对 x_1 配完全平方"的含意。

于是我们作一个线性变换

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = \qquad\qquad x_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = \qquad\qquad x_n \end{cases} \tag{11}$$

显然，其系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = a_{11} \neq 0$$

解出其逆变换：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}} y_1 - \dfrac{a_{12}}{a_{11}} y_2 - \cdots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} y_n \\ x_2 = \qquad\qquad y_2 \qquad\qquad , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \qquad\qquad\qquad\qquad y_n \end{cases} \tag{12}$$

它的系数行列式 $= \dfrac{1}{a_{11}} \neq 0$，所以也是满秩的。(11)与(12)是互为逆的两个满秩线性变换，它们实际上表示同一个变换。以后，如无必要，就不再把它们区分，而是看成可以互相代替的。

显然，(4)经过变换(12)，即是经过变换(11)就变成

$$f = \frac{1}{a_{11}} y_1^2 + h(y_2, y_3, \cdots, y_n)$$

可见在 f 的表示式中，交叉项中没有 y_1 了。这就意味着向平方和的形式前进一步。现在把 f 化为平方和的问题，转化

到把$h(y_2,y_3\cdots y_n)$化为平方和的问题。对于$n-1$个变数的二次型h我们仍按上述配完全平方的方法处理，必然使h的表示式的交叉项中少一个变数。依此类推：每一步对一个变数（出现在平方项中的变数）配完全平方，接着经过一次类似于(11)的满秩线性变换，在所得到的关于新变数的二次型的交叉项中就减少一个变数。因为变数只有有限多个，所以经过有限步以后，就没有任何交叉项了，这时就得到了平方和的形式。

上述作法每一步都有同样的前提：二次型中至少有一个平方项出现。如果二次型中没有任何平方项，怎么办呢？

当二次型没有平方项时，总有交叉项，因为既没有平方项，又没有交叉项的二次型，只能是零，没有意义，不妨设$a_{12}\neq 0$，这时令满秩线性变换（称为辅助变换）

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 \\ x_2 = z_1 - z_2 \\ x_3 = z_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = z_n \end{cases} \tag{13}$$

经过这个线性变换，交叉项$2a_{12}x_1x_2$变成$2a_{12}z_1^2-2a_{12}z_2^2$，而其它交叉项由于不同时含有$x_1$和$x_2$，所以不会出现平方项，就是说，从整个二次型看，经变换后出现的平方项$2a_{12}z_1^2-2a_{12}z_2^2$能最终保存下来，这就化为上面证明所需要的情形。

综上所述，最终将二次型(4)化为平方和(10)所用的满秩线性变换，就是中间每一步所用的配完全平方变换(11)或辅助变换(13)，按照施用的先后次序的乘积。因为线性变换

是满秩的，所以在平方和(10)中平方项出现(即系数不等于零)的个数 r 等于二次型(4)的秩。证毕。

现在举例说明上述配方法：

例 2　用满秩线性变换化二次型

$$f = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3$$

为平方和

解：因为二次型中没有平方项，所以先作辅助变换(其作用就是产生平方项)：

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \quad \text{即} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{aligned} f &= 2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + 2(y_1 + y_2)y_3 - 6(y_1 - y_2)y_3 \\ &= 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3 \end{aligned}$$

因有 y_1^2 出现，且交叉项中含有 y_1，所以对 y_1 配完全平方

$$\begin{aligned} f &= 2(y_1^2 - 2y_1y_3) - 2y_2^2 + 8y_2y_3 \\ &= 2(y_1 - y_3)^2 - 2y_2^2 + 8y_2y_3 - 2y_3^2 \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} y_1 = z_1 + z_3 \\ y_2 = z_2 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

则

$$f=2z_1^2-2z_2^2+8z_2z_3-2z_3^2$$

因为 z_2^2 出现且交叉项含有 z_2，所以再对 z_2 配完全平方

$$\begin{aligned}f&=2z_1-2(z_2-4z_2z_3)-2z_3^2=2z_1^2-2(z_2-2z_3)^2\\&\quad-2z_3^2+8z_3^2\\&=2z_1^2-2(z_2-2z_3)^2+6z_3^2\end{aligned}$$

令 $\begin{cases}w_1=z_1\\w_2=\quad z_2-2z_3,\\w_3=\quad\quad z_3\end{cases}$ 即 $\begin{cases}z_1=w_1\\z_2=w_2+2w_3\\z_3=\quad\quad w_3\end{cases}$

即 $\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{bmatrix}$

则

$$f=2w_1^2-2w_2^2+6w_3^2$$

这已经是平方和了. 中间共用三次满秩线性变换，它们依次相乘的乘积便是化 f 为平方和所用的总变换，就是

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\end{bmatrix}
$$

注意，上述求解过程是分步做的，目的是使读者详细了解每一步骤的条件和做法．实际上可以把若干步合起来做．请看下例．

例 3　用满秩线性变换化二次型

$$
f=2x_1x_2-x_2^2-4x_2x_3+x_3^2
$$

为平方和．

解：$f=(2x_1x_2-x_2{}^2-4x_2x_3)+x_3^2$

$$
\begin{aligned}
&=-(-2x_1x_2+x_2^2+4x_2x_3)+x_3^2=-(-x_1\\
&\quad+x_2+2x_3)^2+x_3^2+x_1^2-4x_1x_3+4x_3^2\\
&=-(-x_1+x_2+2x_3)^2+x_1^2-4x_1x_3+5x_3^2\\
&=-(-x_1+x_2+2x_3)^2+(x_1{}^2-4x_1x_3)+5x_3^2\\
&=-(-x_1+x_2+2x_3)^2+(x_1-2x_3)^2+5x_3^2\\
&\quad-4x_3^2=-(-x_1+x_2+2x_3)^2+(x_1-2x_3^2)+x_3^2
\end{aligned}
$$

令 $\begin{bmatrix}y_1=-x_1+x_2+2x_3\\ y_2=x_1-2x_3\\ y_3=\qquad\qquad x_3\end{bmatrix}$　即 $\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$

则

$$
f=-y_1{}^2+y_2{}^2+y_3{}^2
$$

注意：解中只写出由 y_1，y_2，y_3 到 x_1，x_2，x_3 的满秩线性变换，而没写出由 x_1，x_2，x_3 到 y_1，y_2，y_3 的满秩线性变换，前面已经交代过在这种场合是允许的，因为后者的矩阵

形式是

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

是不难从前者求得的。

其次，在连续施行配方法时，千万不要忘记：每一次配方是对一个变数配完全平方，而不是随便地配方。

还要注意，一个二次型可以用不同的满秩线性变换化为不同的平方和，比如例 3 中的二次型可以这样化为平方和

$$\begin{aligned} f &= 2x_1x_2 - x_2^2 + (-4x_2x_3 + x_3^2) = 2x_1x_2 - x_2^2 \\ &\quad + (-2x_2 + x_3)^2 - 4x_2^2 = 2x_1x_2 - 5x_2^2 \\ &\quad + (-2x_2 + x_3)^2 = -5(-\frac{2}{5}x_1x_2 + x_2^2) + (-2x_2 \\ &\quad + x_3)^2 = -5(-\frac{1}{5}x_1 + x_2)^2 + (-2x_2 + x_3)^2 \\ &\quad + \frac{1}{5}x_1^2 \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = -\frac{1}{5}x_1 + x_2 \\ y_3 = -2x_2 + x_3 \end{cases} \qquad \text{即}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

则

$$f=\frac{1}{5}y_1^2-5y_2^2+y_3^2$$ 这与例 3 的平方和不同。

例 4　用满秩线性变换化二次型

$$f=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_3-2x_2x_3+2x_3^2$$

为平方和

解：$f=(x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3)+x_2^2-2x_2x_3+2x_3^2$

$=(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2-2x_2x_3+2x_3^2$

$-x_2^2-x_3^2+2x_2x_3=(x_1+x_2-x_3)^2+x_3^2$

令

$$\begin{cases}y_1=x_1+x_2-x_3\\ y_2=x_3\\ y_3=x_2\end{cases}$$

则

$$f=y_1^2+y_2^2$$

注意，本例的平方和中只有两个平方项出现，但线性变换仍需写成三个变数到三个变数的满秩线性变换，这点在本节开始时已作交代。千万不可写成下面的样子：

令
$$\begin{cases}y_1=x_1+x_2-x_3\\ y_2=x_3\end{cases}$$

则
$$f=y_1^2+y_2^2$$

因为这里用的变换是从 x_1，x_2，x_3 到 y_1，y_2 的变换，它谈不到是满秩的线性变换，而且它实际上相当于把三维空间(三个变数)中的问题化为二维空间(两个变数)，问题的性质发生了变化。因此，后者的做法是错误的。

练　习　二

用满秩线性变换化下列二次型为平方和：

1. $f=x_1^2-3x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$。

2. $f=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$。

第三节　实二次型的标准形、惯性定理

上一节讲到，任何一个二次型总可以用满秩线性变换化为平方和，但平方和(10)并不是唯一的。由于(10)中系数不为零的平方项的个数 r 等于二次型的秩，因此 r 是唯一的。所谓平方和不唯一，实际上指的是：虽然诸系数 $d_i\neq0(i=1,2\cdots r)$，但 d_i 取正值，取负值，以及取多大的值，则是不唯一的，这点在例 3 已验证了。现在的问题是：是否能把平方和化到最简单的形式？可以认为，系数为 1 和 −1 以及 0 的平方和是最简单的形式了。这一节，我们仅对复二次型及实二次型两种特殊情况讨论这个问题。

所谓复(实)二次型指的是两个方面：二次型(4)的系数 a_{ij} 全是复(实)数，同时所用的满秩线性变换(7)的系数也全是复(实)数。

我们有下面的结论：

任何一个复二次型都可以用满秩线性变换化成最简单的平方和

$$f=v_1^2+v_2^2+\cdots+v_r^2 \tag{14}$$

(14)叫复二次型的规范形，除变数 v_i 的顺序外，规范形是唯一的，它被 f 的秩 r 唯一确定。

要证明这个结论，只须在化二次型(4)为平方和(10)的基础上，再作一次满秩复线性变换：

$$
\begin{cases}
w_1 = \dfrac{1}{\sqrt{d_1}} v_1 \\
w_2 = \dfrac{1}{\sqrt{d_2}} v_2 \quad d_i \neq 0 \quad i = 1, 2, \cdots, r \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
wr = \dfrac{1}{\sqrt{dr}} vr \\
wr_{+1} = vr_{+1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
w_n = v_n
\end{cases}
$$

则 $f = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_1^2$ 这便是规范形。

但是复变换只能把所有的非零系数(不论是正值还是负值)都化为1，却无法固定变数的顺序。因此规范形的唯一性指的是它恰好有 r 个系数等于1的平方项，而不计较是哪 r 个变数的平方项。说得再细一点就是：当 $r<n$ 时，(14)可能有变数的顺序上的差异(如例4的规范形可以是 $f = y_1^2 + y_2^2$，或 $f = y_1^2 + y_3^2$，或 $f = y_2^2 + y_3^2$，三者之一)当 $r = n$ 时(14)只有一种形式：$f = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2$，没有变数顺序上的差异。

因为在实数范围内，负数不能开平方，所以实系数线性变换只能把正系数变为1、把负系数变为-1。这样，在讨论实二次型的平方和化为最简形式的时候，需要把平方和中的正项(系数为正的项)与负项(系数为负的项)区别开来，写为

$$f = d_1 w_1^2 + \cdots + d_p w_p^2 - d_{p+1} w_{p+1}^2 - \cdots - d_r w_r^2$$

$(d_i>0 \quad i=1,2\cdots r)$

令

$$\begin{cases} w_1=\dfrac{1}{\sqrt{d_1}}v_1 \\ w_2=\dfrac{1}{\sqrt{d_2}}v_2 \qquad d_i>0 \quad i=1,2\cdots r \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ wr=\dfrac{1}{\sqrt{dr}}vr \\ wr_{+1}=vr_{+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_n=v_n \end{cases}$$

则

$$f=v_1^2+\cdots+v_p^2-v_{p+1}^2-\cdots-v_r^2 \qquad (15)$$

(15)叫实二次型的规范形。自然要问，(15)也是唯一的吗(变数顺序除外)？也就是(15)中的 p 是唯一的吗？从大量解题结果看(比如例 3 的两个平方和)这个问题的答案似乎是肯定的。下面的惯性定理证明了这个唯一性确实是成立的。

惯性定理　任何一个实二次型都可以用满秩线性变换化成规范形(15)，除变数顺序外，它是唯一的，被 r 所唯一确定。

证明：依照上面的分析，要证明这个规范形(15)的唯一性，只要证明正项个数 p 是唯一的就可以了(因为负项个数 $=r-p$，r 是唯一的)。所谓 p 是唯一的，其含意是 p 仅仅依赖于二次型 f 本身，而不依赖于把 f 化为规范形(15)时所用

的满秩线性变换。因此，只要我们能够证明一个二次型用任何两种不同的满秩线性变换化成的两个规范形中的正项个数相同，那么，我们就证明了 p 的唯一性，也就证明了惯性定理。

为此，我们设二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 用满秩线性变换

$$X=By$$

化成规范形

$$f(x_1,x_2,\cdots x_n)=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$$

而用满秩线性变换

$$X=CZ$$

化成规范形

$$f(x_1,x_2,\cdots x_n)=z_1^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2$$

我们要证明 $\qquad p=q$。

用反证法，即假设 $p\neq q$，推出矛盾结果。$p\neq q$ 等价于两种情形：$p>q$，或 $q>p$。

先看 $p>q$ 的情形：

由于两个规范形都等于 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，所以这两个规范形也应该相等：

$$y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2=z_1^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2 \tag{16}$$

注意 y_i 与 z_i 都是 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 的线性齐次函数，等式(16)的含意就是对变数 x_1，x_2，$\cdots x_n$ 的所取的任何一组值，(16)两端的函数值都应该相等。如果我们利用 $p>q$ 这个假设，能够找出 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 的某一组值，使(16)两端在这组值的函数值并不相等，这就产生了一个矛盾，从而否定 $p>q$ 的假设。

为此，先要把 y_i 与 z_i 的关系找出来，从第二个变换中解出 Z

$$Z=C^{-1}X$$

代入第一个变换，即得

$$Z=C^{-1}BY \tag{17}$$

(17)可以看成由 z_1，z_2，$\cdots z_n$ 到 y_1，y_2，$\cdots y_n$ 的一个满秩线性变换，它的系数矩阵是

$$C^{-1}B=G=\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12}\cdots g_{1n} \\ g_{21} & g_{12}\cdots g_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ g_{n1} & g_{n2}\cdots g_{nn} \end{bmatrix}$$

把变换(17)详细的写出来，就是

$$\begin{cases} z_1=g_{11}y_1+g_{12}y_2+\cdots+g_{1n}y_n \\ z_2=g_{21}y_1+g_{22}y_2+\cdots+g_{2n}y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_n=g_{n1}y_1+g_{n2}y_2+\cdots+g_{nn}y_n \end{cases} \tag{18}$$

要想找出使(16)两端取不同函数值的一组 x_1，$x_2\cdots x_n$ 的值，我们可以用反推法：设(16)左端取正值，同时设右端取非正值，也就是 $y_{p+1}=y_{p+2}=\cdots=y_r=0$（这时，左端的函数值 $=y_1^2+\cdots+y_p^2$）同时使 $z_1=z_2=\cdots=z_q=0$（这时，右端的函数值 $=-z^2g_{+1}-\cdots-z_r^2+0z_{r+1}^2+\cdots+0z_n^2$），但是这样的 x_1，$x_2\cdots$，x_n 的值有没有呢？实际上，$z_1=z_2=\cdots=z_q=0$，$y_{p+1}=\cdots=y_n=0$ 是关于 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 的齐次线性方程组，利用(18)，该方程组就转化为关于 y_1，y_2，$\cdots$，y_n 的齐次线性方程组，写出来就是：

$$
\begin{cases}
g_{11}y_1 + g_{12}y_2 + \cdots + g_{1n}y_n = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
g_{q1}y_1 + g_{q2}y_2 + \cdots + g_{qn}y_n = 0 \\
y_{p+1} = 0 \\
\cdots\cdots\cdots \\
y_n = 0
\end{cases}
\qquad (19)
$$

由于假设 $p>q$，所 以(19)中 方 程 个 数 $=q+(n-p)=n-(p-g)<n$，于是根据齐次线性方程组有非零解的条件知(19)关于 y_1，y_2，…，y_n 有非零解．设

$$y_1=k_1,\ \cdots y_p=k_p,\ y_{p+1}=k_{p+1},\ \cdots,\ y_n=k_n$$

是(19)的一个非零解．显然 $k_{p+1}=\cdots=k_n=0$，所以 k_1，k_2，…，k_p 不全为零，故(16)左端的值 $=k_1^2+\cdots+k_p^2>0$ 而右端的值 $=-z_{g+1}^2-\cdots-z_r^2+0z_{r+1}^2+\cdots+0z_n^2\leqslant 0$，这个矛盾的产生说明 $p>g$ 是不对的．

同理可证 $g>p$ 也是不对的．

上两点合起来就是：$p\neq g$ 是不对 的．那 么 只 好 $p=g$．这就是所要证明的．

这个定理习惯上叫惯性定理．“惯性”二字形象的说明了实二次型的规范形中的正平方项个数 p 的不变 性．因 此，称(15)中的 p 为二次型 f 的正惯性指 标，而 $r-p$ 叫 f 的 负惯性指标．

显然，实二次型的标准形中的正平方项个数等于正惯性指标，负平方项个数等于负惯性指标．例如：例 2 中二次型的正惯性指标 $=2$，负惯性指标 $=1$；例 3 中二次型的正惯性指标 $=2$，负惯性指标 $=0$．

例 5　用满秩线性变换化二次形

$$f = 2x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2$$

为规范形，并求出它的秩及正、负惯性指标。

解：$f = 2(x_1^2 - 3x_1x_2) + 5x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2$

$$= 2\left(x_1 - \frac{3}{2}x_2\right)^2 + 5x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2 - 2\cdot\frac{9}{4}x_2^2$$

$$= 2\left(x_1 - \frac{3}{2}x_2\right)^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2$$

$$= 2\left(x_1 - \frac{3}{2}x_2\right)^2 + \frac{1}{2}(x_2^2 + 4x_2x_3) + 2x_3^2$$

$$= 2\left(x_1 - \frac{3}{2}x_2\right)^2 + \frac{1}{2}(x_2 + 2x_3)^2 + 2x_3^2 - \frac{1}{2}\cdot 4x_3^2$$

$$= 2\left(x_1 - \frac{3}{2}x_2\right)^2 + \frac{1}{2}(x_2 + 2x_3)^2$$

$$= \left[\sqrt{2}\left(x_1 - \frac{3}{2}x_2\right)\right]^2 + \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 + 2x_3)\right]^2$$

$$= \left(\sqrt{2}\,x_1 - \frac{3}{\sqrt{2}}x_2\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \sqrt{2}\,x_3\right)^2$$

令

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\frac{3}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2$$

这便是 f 的规范形，它的秩 $r=2$，正惯性指标 $p=2$，负惯性指标 $=r-p=2-2=0$

练　习　三

1. 用满秩线性变换把练习二中的二次型化为规范形，并求出它们的正惯性指标和负惯性指标。

2. 用满秩线性变换化二次型

$$f=x_1^2+2x_2^2+x_4^2+4x_1x_2+4x_1x_3+3x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$$

为规范形，并求出它的正惯性指标和秩。

第四节　正定二次型

在二次型中，正定二次型的地位最重要，本节就给出正定二次型的定义及两个判别法则。

正定二次型的定义　如果对于任何一组不全为零的实数 c_1，c_2，…，c_n，二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的值 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 都为正值（$f(c_1,c_2,\cdots,c_n)>0$），那么就称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是正定二次型。

由定义立即可以看出二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$$

是正定的．因为任何 n 个不全为零的实数的平方和总是一个正数。

平方和形式的二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$$

当系数 d_i 全大于零时是正定的。反之，只有当它的系数 d_i 全大于零时才是正定的。因为如果 d 不全大于零，不妨设 $d_1 \leqslant 0$，那么取 $x_1 = 1$，$x_2 = 0$，…，$x_n = 0$，这 n 个不全为零的实数，却使值 $f(1,0,\cdots,0) = d_1 \cdot 1 + d_2 \cdot 0 + \cdots + d_n \cdot 0 = d_1 \leqslant 0$，即 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 不是正定的。

合起来即得到结论：平方和形式的二次型是正定的充分必要条件是它的平方项系数全大于零。

那么对于一般形式的二次型怎样判别是不是正定的呢？我们给出两个有关的判别方法：

1. 实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是正定的充分必要条件是它的正惯性指标等于 n。

证明：设二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是满秩线性变换

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{20}$$

化成平方和。

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n{}^2 y_n \tag{21}$$

由前面的讨论知道，(21)右端关于 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 为正定二次型的充分必要条件是 d_i 全大于零，同时 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的正惯性指标等于 n 的充分必要条件也是 d_i 全大于零。因此，判别方法 1° 等价于下面的方法：二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 为正定的充分必要是它的标准形中平方项系数 d_i 全大于零，我们就按这个说法来证明。

先证明必要性，即如果 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 为正定，则 d_i 全大于零。由前面的讨论，这只须证明 $d_1 y_1^2 + \cdots + d_n y_n^2$ 为正定的。对于任意一组不全为零的数值 $y_1 = k_1$，$y_2 = k_2$，$\cdots y_n =$

k_n，由变换(20)可确定出对应的一组数值 $x_1=c_1$，$x_2=c_2$，…，$x_n=c_n$，它们适合关系

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} \tag{22}$$

因为 k_1，k_2，…，k_n 不全为零，即列矩阵 $\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$ 的秩等于1，C 为满秩矩阵，所以(22)右端矩阵乘积的秩等于1，于是左端的列矩阵 $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ 的秩也等于1，也就是实数 c_1，c_2，…，c_n 不全为零，因为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是正定的，所以应有 $f(c_1, \cdots, c_n)>0$，从(21)来看就有

$$d_1k_1^2+d_2k_2^2+\cdots+d_nk_n^2=f(c_1,c_2,\cdots,c_n)>0$$

由于 k_1，k_2，…，k_n 是任意一组不全为零的实数，所以平方和 $d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$ 是正定的，故 d_i 全大于零。

再证明充分性，即如果 d_i 全大于零，则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为正定的，与证明必要性的做法相仿，任取一组不全为零的实数 $x_1=c_1$，$x_2=c_2$，…，$x_n=c_n$，由(19)可得对应的一组实数 $y_1=k_1$，$y_2=k_2$，…，$y_n=k_n$，它们适合关系

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = C^{-1} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

同样可以证明 k_1，k_2，…，k_n 也不全为零，因为 d_i 全大于

零，所以 $d_1k_1^2+d_2k_2^2+\cdots+d_nk_n^2>0$，从(21)来看就有

$$f(c_1, c_2, \cdots, c_n)=d_1k_1^2+d_2k_2^2+\cdots+d_nk_n^2>0$$

由于 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是任意一组不全为零的实数，由定义知 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是正定的。

在例 2 至例 5 中的二次型都不是正定的，因为它们的正惯性指标都小于 n。

例 6　判断二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-4x_1x_2+3x_2^2-2x_2x_3+4x_3^2$$

是不是正定的。

解：把 f 用满秩线性变换化为平方和

$$f=2(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+3x_3^2$$

令

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

则

$$f=2y_1^2+y_2^2+3y_3^2$$

可见正惯性指标 $=3=n$，所以 f 是正定二次型。

为了给出第二个判别正定二次型的方法，我们先引入顺序主子式的概念。

设矩阵 A

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\cdots a_{1n}\\a_{21}&a_{22}\cdots a_{2n}\\\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}&a_{n2}\cdots a_{nn}\end{bmatrix}.$$

p_i 为位于A的前 i 行前 i 列的 i 阶子式。即

$$p_i=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1i} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2i} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots a_{ii} \end{vmatrix} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

称 p_i 为A的 i 阶顺序主子式

例如，三阶方阵

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

的各阶顺序主子式为

$$p_1=|-1|=-1,\quad p_2=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=1$$

$$p_3=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=17$$

（2）实二次型 $f=X'AX$ 为正定二次型的充分必要条件是，它的系数矩阵A的各阶顺序主子式全大于零。

这个方法不加证明了，仅举例说明，先看

例 6　$f=2x_1^2-4x_1x_2+3x_2^2-2x_2x_3+4x_3^2$

的系数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

各阶顺序主子式

$$p_1=|2|=2>0,\ p_2=\begin{vmatrix}2 & -2\\ -2 & 3\end{vmatrix}=2>0,$$

$$p_3=\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 4\end{bmatrix}=6>0$$

所以二次型 f 是正定的。

例 7　判断二次型

$$f=2x_1x_2-x_2^2+x_3^2$$

是不是正定的。

解：f 的系数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

因为 A 的一阶顺序主子式

$$p_1=|0|=0$$

所以 f 不是正定的。

练　习　四

用两种方法判断下列二次型是不是正定的。

1. $f=x_1^2-3x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$
2. $f=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_2x_3$
   $+2x_3x_4$

第五节　正交矩阵与正交变换

前面四节讲的是用满秩线性变换化二次型为标准形(或规范形)的问题。在本章开始部分引用了一个几何例子：用直角坐标系的转轴变换化二次曲线方程为标准方程。这个例子所提出的问题是这样一个几何问题：它保持平面上任何向量的长度不变，仅仅是把坐标主轴旋转得与二次曲线的对称轴相重合(通常叫"化到主轴上")。这样一个几何问题，直到现在还没有推广到大于三维的向量中去，因为我们现在甚至还不知道什么是$n(n>3)$维向量的长度，当然也不知道怎样保持向量长度不变的做法。从本节开始讨论这个问题。就是用正交变换化二次型为标准形的问题(即所谓化二次型到主轴)

我们还是先分析本章开头那个几何例子作为引子。那里用的转轴变换表示式为

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

变换的特点都体现在它的系数矩阵A上。

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

A不是一般的满秩矩阵，它的特点有下面两条：第一条：每一行元素的平方和等于1

第一行：$(\cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2 = 1$

第二行：$(\sin\theta)^2 + (\cos)\theta^2 = 1$

第二条：两个不同行的对应元素乘积之和等于零。

$$(\cos\theta)(\sin\theta)+(-\sin\theta)(\cos\theta)=0$$

这两条对于列也成立。

上述特点还可以用矩阵乘积的形式表达，这就是

$$AA'=A'A=E$$

只要验证一下就清楚了：

因为 $A'=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

所以 $AA'=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\theta+(-\sin\theta)(-\sin\theta) & \cos\theta\sin\theta+(-\sin\theta)\cos\theta\\ \sin\theta\cos\theta+\cos\theta(-\sin\theta) & \sin\theta\sin\theta+\cos\theta\cos\theta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=E$$

同理 $A'A=E$

比较一下，可以看出用矩阵表达更为简单明了，因此，我们把这样的矩阵A叫做正交矩阵，把以正交矩阵作为系数矩阵的线性变换称作正交变换。下面引入这两个定义：

如果n阶方阵A适合关系

$$AA'=A'A=E \qquad (\text{即 } A'=A^{-1}) \qquad (23)$$

则称A为正交矩阵。

如果线性变换。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

的系数矩阵 C 是正交矩阵，则称该变换为正交变换。

正交矩阵与正交变换的例子：

（1）单位矩阵 E 是正交矩阵。

（2） $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ 是正交矩阵。

因为 $AA' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= E \quad A'A = E$

（3） $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 不是正交矩阵。

因为 $B'B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \neq E$

（4）线性变换 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ 是正交变换

因为系数矩阵是正交矩阵。

(5) 线性变换$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$不是正交变换.

因为系数矩阵不是正交矩阵.

现在我们必须把几何向量的内积与长度推广到n维向量中来.

设$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$是任意两个实$n$维向量，称数$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$为向量$\alpha$与$\beta$的内积,记为

$$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n. \qquad (24)$$

比如 $\alpha=(1,2,3,4)$, $\beta=(0,1,-1,2)$, 则

$(\alpha,\beta)=1\times0+2\times1+3\times(-1)+4\times2=7$

当$\alpha=\beta$时，(24)为

$$(\alpha,\alpha)=a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2\geqslant0$$

并且，只有在$\alpha=0=(0,0,\cdots,0)$时，其中的等号才成立，即只要$\alpha\neq0$, 就有$(\alpha,\alpha)>0$

称非负数(α,α)的算术根为向量α的长度(模)，记为

$$|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2} \qquad (25)$$

如果$|\alpha|=1$, 则称α为单位向量.

显然，只有零向量的长度才等于零，任何非零向量的长度都是一个正数，即$|0|=0$, 当$\alpha\neq0$时，$|\alpha|>0$.

比如$\alpha=(1,2,3,-4)$.

$|\alpha|=\sqrt{1^2+2^2+3^2+(-4)^2}=\sqrt{30}$,

$\alpha=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$是单位向量，因为

$$|\alpha| = \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + 0 + (\frac{1}{\sqrt{3}})^2} = 1$$

读者不难发现，上述向量内积与向量长度的定义，是直接从解析几何中的向量内积与向量长度推广而来的。下面我们还要把向量正交的概念直接推广过来。

如果$(\alpha,\beta)=0$，则称向量α与β正交(即垂直)。

再引入几个有关的常用性质。

关于内积有

(1) $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$

因为$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=b_1a_1+b_2a_2+\cdots+b_na_n=(\beta,\alpha)$。

(2) $(k\alpha,\beta)=(\alpha,k\beta)=k(\alpha,\beta)$。$k$为任何实数

因为$(k\alpha,\beta)=(ka_1)b_1+(ka_2)b_2+\cdots+(ka_n)b_n=k(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)$

$$(\alpha,k\beta)=a_1(kb_1)+a_2(kb_2)+\cdots+a_n(kb_n)=k(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)。$$

$$k(\alpha,\beta)=k(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)。$$

所以三个数都相等

(3) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$

设$\gamma=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$那么

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta,\gamma)&=(a_1+b_1)c_1+(a_2+b_2)c_2+\cdots+(a_n+b_n)c_n\\&=a_1c_1+b_1c_1+a_2c_2+b_2c_2+\cdots a_nc_n+b_nc_n\\&=(a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n)+(b_1c_1+b_2c_2+\cdots+b_nc_n)\\&=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)\end{aligned}$$

这个性质还可推广为

$(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s,\beta)=(\alpha_1,\beta)+(\alpha_2,\beta)+\cdots+(\alpha_s,\beta)$

关于长度有

(1) $|k\alpha|=|k||\alpha|$

因为$|k\alpha|=\sqrt{(k\alpha,k\alpha)}=\sqrt{k^2(\alpha,\alpha)}$

$$=\sqrt{k^2}\sqrt{(\alpha,\alpha)}=|k||\alpha|$$

比如$|-2\alpha|=2|\alpha|$

(2) 对任何非零向量α，可作向量

$$\alpha_0=\frac{1}{|\alpha|}\alpha$$

α_0是与α同方向的单位向量

因为$\frac{1}{|\alpha|}>0$，所以α_0与α同方向，且

$|\alpha_0|=|\frac{1}{|\alpha|}\alpha|=\frac{1}{|\alpha|}|\alpha|=1$，所以$\alpha_0$是单位向量，

比如$\alpha=(2,1,-2)$

$|\alpha|=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=3$，与$\alpha$同方向的单位向量便是$\alpha_0=\frac{1}{|\alpha|}\alpha=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{-2}{3})$。

关于正交有下述性质：

(1) 零向量与任何向量都正交。

因为$(0,\alpha)=0a_1+0a_2+\cdots+0a=0$对任何向量$\alpha$都成立。

(2) 任何非零向量都不与自己正交，即零向量与自己正交且只有零向量才与自己正交。

因为$(\alpha,\alpha)=0$的充分必要条件是$\alpha=0$。

(3) 如果α与β，γ都正交，那么α与它们的任何线性组合$k\beta+l\gamma$也正交。

因为$(\alpha,k\beta+l\gamma)=(k\beta+l\gamma,\alpha)$

$$=(k\beta,\alpha)+(l\gamma,\alpha)$$

$$=k(\beta,\alpha)+l(\gamma,\alpha)=k(\alpha,\beta)+l(\alpha,\gamma)$$

$$=k\cdot 0+l\cdot 0=0。$$

(4) 如果α_1，$\alpha_2\cdots$，α_s是两两正交的非零向量组，则α_1，α_2，$\cdots$，α_s线性无关(证明略)。

例8　设$\alpha=(1,2,-1)$，试求一个与α正交的单位向量。

解：先求与α正交的向量β，设$\beta=(x_1,x_2,x_3)$，令β与α正交来确定β的分量x_1，x_2，x_3的值。

$$(\alpha,\beta)=0,\ 即\quad x_1+2x_2-x_3=0$$

这是一个关于x_1，x_2，x_3的齐次方程组，应含有两个自由未知量，取x_1，x_2为自由未知量，令$x_1=1$，$x_2=0$，得$x_3=x_1+2x_2=1$　故可取$\beta=(1,0,-1)$，(当然与α正交的β有无穷多个，但本例只需要我们找出一个来)。

且$|\beta|=\sqrt{1^2+0+(-1)^2}=\sqrt{2}$。

再在β的基础上作一个与β同方向的单位向量γ。

$$\gamma=\frac{1}{|\beta|}\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$$

$$=(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{-1}{\sqrt{2}})$$

故　$\gamma=(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}})$即为所求的向量。

(由正交性质(3)知，β与α正交，所以$\gamma=\frac{1}{|\beta|}\beta$也与$\alpha$正交，且$|\gamma|=1$)

例 9　n维单位向量组

$$\begin{cases} e_1=(1,0,\cdots 0) \\ e_2=(0,1,\cdots 0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n=(0,0,\cdots 1) \end{cases}$$

显然两两正交，一般地我们把m个两两正交的单位向量α_1，α_2，…，α_m，习惯上称为标准正交向量组，这里“标准”指的就是“长度等于1”。

α_1，α_2，…，α_m是标准正交向量组，用内积的形式写出来就是

$$(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases} 1, & \text{当 } i=j \text{（即每一个向量是标准的）} \\ 0, & \text{当 } i\neq j \text{（即两两正交）} \end{cases}$$

特别，n维单位向量组e_1，e_2，…，e_n就是一个标准正交向量组。

正交矩阵有下面的重要性质。

正交矩阵的行向量组是标准正交向量组，它的列向量组也是标准正交向量组。

设A是正交矩阵，依定义有

$$AA'=A'A=E$$

先看$AA'=E$，写出来就是

$$\begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11}a_{21}\cdots a_{n1} \\ a_{12}a_{22}\cdots a_{n2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}a_{2n}\cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\cdots 0\\ 0 & 1\cdots 0\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ 0 & 0\cdots 1\end{bmatrix}$$

将左端乘来就是

$$\begin{bmatrix}a_{11}^2+a_{12}^2+\cdots+a_{1n}^2 & a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+\cdots+a_{1n}a_{2n}\cdots & a_{11}a_{n1}+a_{12}a_{n2}+\cdots+a_{1n}a_{nn}\\ a_{21}a_{11}+a_{22}a_{12}+\cdots+a_{2n}a_{1n} & a_{21}^2+a_{22}^2+\cdots+a_{2n}^2\cdots\cdots & a_{21}a_{n1}+a_{22}a_{n2}+\cdots+a_{2n}a_{nn}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{n1}a_{11}+a_{n2}a_{12}+\cdots+a_{nn}a_{1n} & a_{n1}a_{21}+a_{n22}+\cdots+a_{nn}a_{2n}\cdots\cdots & a_{n1}^2a_{n2}^2+\cdots+a_{nn}^2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\cdots 0\\ 0 & 1\cdots 0\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ 0 & 0\cdots 1\end{bmatrix}$$

令 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$ $i=1,2,\cdots,n$ 代表A的行向量，那么上式就可表示为

$$
\begin{bmatrix}
(\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2)\cdots(\alpha_1, \alpha_n) \\
(\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2)\cdots(\alpha_2, \alpha_n) \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
(\alpha_n, \alpha_1) & (\alpha_n, \alpha_2)\cdots(\alpha_n, \alpha_n)
\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
1 & 0\cdots 0 \\
0 & 1\cdots 0 \\
\cdots & \cdots\cdots \\
0 & 0\cdots 1
\end{bmatrix}
$$

按对应元素相等就得到

$$
(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}1, & \text{当 } i=j \quad \text{（由对角线上元素相等而来）} \\ 0, & \text{当 } i\neq j \quad \text{（由对角线以外元素相等而来）}\end{cases}
$$

这就表明A的n个行向量是标准正交向量组。

同理，由$A'A=E$可得A的n个列向量也是标准正交向量组。

反过来，如果A的n个行向量是标准正交向量组，那么按上面的推算过程倒推回去，便得到等式$AA'=E$；同理，如果A的n个列向量是标准正交向量组，便得到等式$A'A=E$。

将上面的讨论综合起来，便得到正交矩阵的一个判别方法：A是正交矩阵的充分必要条件是它的n个行向量是标准正交向量组，n个列向量也是标准正交向量组。

再经过深入的研究，上述条件可以简化为：A是正交矩阵的充分必要条件是它的n个行向量是标准正交向量组。（或者，它的n个列向量是标准正交向量组）。

例如　设向量组$\alpha_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ 0)$，$\alpha_2=(\frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}},\ 0)$，$\alpha_3=(-\frac{1}{\sqrt{12}},\ \frac{1}{\sqrt{12}},\ \frac{1}{\sqrt{12}},\ \frac{3}{\sqrt{12}})$，$\alpha_4=(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$，经检验是标准正交向量组，所以用它们作行向量得出的 4 阶矩阵

$$A=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{3}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

和用它们作列向量得出的 4 阶矩阵

$$B=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

都是正交矩阵（实际上 $B=A'$）。

注意，用 α_1，α_2，α_3，α_4 作不同顺序的行向量所得出的矩阵都是正交矩阵。比如

$$C=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{3}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

也是正交矩阵，等等. 对列也是这样.

再者，如果已知A是正交矩阵，那么A的逆矩阵极易求出，因为$A^{-1}=A'$. 比如上面的A，B，C都是正交矩阵，所以$A^{-1}=A'$，$B^{-1}=B'$，$C^{-1}=C'$，读者可自行写出. 就是说正交矩阵的逆矩阵和转置矩阵是同一个矩阵，这是正交矩阵的一个特点，此外，它还有一个特点，那就是：正交矩阵的行列式只能等于1或-1.

因为，A是正交矩阵，所以有等式

$$AA'=E$$

两边取行列式得

$$|AA'|=|E|$$

即 $$|A||A'|=1,\ 但|A'|=|A|,\ 所以$$

$$|A|^2=1,\ 即|A|=\pm1.$$

后一个特点说明了，如果一个矩阵的行列式不等于1或-1，那么这个矩阵不可能是正交矩阵. 比如矩阵

$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$不是正交矩阵，因为它的行列式$\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2$.

至于正交变换，我们只指出它的一个重要性质，就是：

任何一个向量经过正交变换后长度不变。或者说正交变换不改变向量的长度。

证　设 $X=(x_1,x_2,\cdots x_n)'$ 是任意一个列向量，经过正交变换，$X=CY$ 后变为列向量 $Y=(y_1,y_2,\cdots y_n)'$，C 为正交矩阵，即 $CC'=C'C=E$。

因为内积 $(X,X)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$。把X看成单列矩阵

按矩阵相乘有　$X'X=[x_1,x_2\cdots x]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$

$$=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2.$$

所以内积可写为单行矩阵与单列矩阵乘积的形式 $(x,x)=x'x$（如果 α，β 表示行向量，即单行矩阵，那么 $(\alpha,\beta)=\alpha\beta'$）于是将正交变换关系代入内积的矩阵表示式中，便得到

$$(X,X)=X'X=(CY)'(CY)=(Y'C')Cy=Y'(C'C)Y$$
$$=Y'EY=Y'Y=(Y,Y)$$

于是 $|X|=\sqrt{(X,X)}=\sqrt{(Y,Y)}=|Y|$。

就是说正交变换前的向量X的长度与变换后的向量 Y 的长度相等，这个性质体现了正交变换的基本特点，它说明正交变换是几何中转轴变换的直接推广。

顺便说明一下，正交变换也能包含几何中只改变坐标轴正向的变换。比如在平面直角坐标系里，将 x 轴的正向反过来，y 轴正向保持不变，这样得到一个新坐标系，设 x，y 是点 M 在原坐标系中，x'，y' 是 M 轴在新坐标系中的坐标，那么这样变换的表示式就是

$$\begin{cases}x=-x'\\y=y'\end{cases}$$

它的系数矩阵是$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$也是正交矩阵，且行列式

$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$，而转轴变换的系数行列式是

$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 1$．前面经过正交矩阵的行列式只能等于 1 或 -1，现在可以说得更细一些，就是当等于 1 时，就相当于转轴变换的系数矩阵；当等于 -1 时，则相当于只反转一个坐标轴正向的变换的系数矩阵．

通过上述对比，读者对正交矩阵与正交变换的理解会更深入一些．

练　习　五

1．求内积：

(1) 设　$\alpha=(1,\ 1,\ -1,\ 2)$，

$\beta=(0,\ -1,\ 1,\ 4)$，求$(\alpha,\ \beta)$．

(2) 设　$\alpha=(1,\ 1,\ 1)$，　$\beta=(1,\ -1,\ 0)$，

$\gamma=(2,\ 0,\ -2)$，

求$(\alpha,\ k\beta+l\gamma)$，$k$，$l$ 为任意实数．

2，设　$\alpha=(1,\ 1,\ -1,\ 2)$，求与 α 同向的单位向量．

3，设　$\alpha=(2,\ 1,\ -1)$，求出两个与 α 正交的单位向量．

4．判别下列变换是不是正交变换：

(1) $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

(2) $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

第六节　矩阵的特征值与特征向量

现在，我们着手解决如何用正交变换化二次型为平方和的问题。我们仍然以“分析法”来开始讨论。

假设二次型 $f = X'AX$ 已经用正交变换 $X = CY$ 化成平方和 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$，来分析一下平方和中的系数 λ_1，λ_2，…，λ_n 与正交矩阵 C 满足什么关系，从而导出求解它们的方法。

我们知道，平方和形式用矩阵乘积表示出来就是

$$\lambda{}_1^2 y + \lambda_1 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

$$= [y_1 y_2 \cdots y_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= Y' \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} Y$$

这样，从上面的假设得到，经正交变换 $X=CY$，

$$f=X'AX=(CY)'A(CY)=Y'(C'AC)Y$$

$$=Y'\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}Y$$

换句话说，作为 y_1，y_2，…，y_n 的二次型来说，经变换 $X=CY$，应该是矩阵 $C'AC$；但由假设，二次型关于 y_1，y_2…y_n 已经是平方和了，于是系数矩阵应该是对角形矩阵

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

作为一个二次型关于同样 n 个变数 y_1，y_2，…y_n 的两个系数矩阵，当然应该相等。

$$C'AC=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix} \tag{26}$$

(26)就是我们所需要的，它给出 λ_1，λ_2，…，λ_n 与正交矩阵 C 适合的最基本最重要的关系。下面我们就从(26)出发，进一步探讨它们的关系与求法。

为了能把方程组、向量等工具用得上，必须把正交矩阵分得更细一些，即将 C 按列分块(每一列当作一块 C_j)，写出来便是 $C=[C_1C_2\cdots C_n]$又因为 C 是正交矩阵，所以 $C'=C^{-1}$，代入(26)得

$$C^{-1}AC=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

两端左乘以 C，又得到

$$AC=C\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

把 C 的分块形式代入，得

$$A[C_1C_2\cdots C_n]=[C_1C_2\cdots C_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

两端分别相乘，得

$$\begin{aligned}[AC_1,\ AC_2,\ \cdots,\ AC_n]&=[C_1\lambda_1,\ C_2\lambda_2,\ \cdots,\ C_n\lambda_n]\\&=[\lambda_1C_1,\ \lambda_2C_2,\ \cdots,\ \lambda_nC_n].\end{aligned}$$

按矩阵相等得

$$\begin{cases}AC_1=\lambda_1C_1\\ AC_2=\lambda_2C_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ AC_n=\lambda_nC_n\end{cases}\tag{27}$$

(27)是系数 λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n 和正交矩阵 C 的 n 个列 $C_1C_2\cdots C_n$ 所满足的关系，它比(26)更进了一步。从(26)到(27)的每一步都是可逆的，因此只要我们能求得满足(27)的数 λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n 和标准正交向量组 C_1，C_2，$\cdots$，C_n(因为它们是正交矩阵的列向量组)，就可以解决本节开始所提出的问题。

为此，针对(27)的形式，我们给出矩阵的特征值与特征向量的概念，讨论它们的性质并给出它们的求法。这就是本节的主要内容

设A是n阶方阵，如果有数λ及非零向量X，满足关系

$$AX=\lambda X \qquad (x\neq 0) \tag{28}$$

则称数λ为矩阵A的特征值，非零向量X为A的属于特征值λ的特征向量。

依此定义，(27)中的数λ_1，λ_2，…，λ_n都应是A的特征值，C_j应是A的属于λ_j的特征向量($j=1.2\cdots n$)此外，C_1，C_2，…，C_n还应是标准正交向量组，或者C_1，C_2，…，C_n是矩阵A的分别属于特征值λ_1，λ_2，…，λ_n的标准正交的特征向量组。

注意：(1) 特征向量必须是非零向量，因为零向量对任何数λ都适合(28)，没有应用价值，再者，从特征向量所反映的问题看，也要求它不等零。

(2) 特征向量依赖于矩阵A，还依赖于特征值λ，因此要指明某特征向量是属于那一个特征值的，不要把二者的所属关系搞乱了。

现在讨论一下特征值与特征向量的常用性质：

(1) 如果X_0是A的属于特征值λ_0的特征向量那么，X_0的非零倍数kX_0，($K\neq 0$)也是A的属于λ_0的特征向量。

因为X_0是A的属于λ_0的特征向量，所以$AX_0=\lambda_0 X_0$

因为$A(kX_0)=k(AX_0)=k(\lambda_0 X_0)=\lambda_0(kX_0)$，且$kx_0\neq 0$所以$kx_0$也是$A$的属于$\lambda_0$的特征向量。

(2) 如果X_1与X_2是A的属于特征值λ_0的任意两个特征向量，那么它们的任何非零线性组合$kX_1+lX_2\neq 0$，k，l

为任意数，都是A的属于λ_0的特征向量。

因为由已知条件$AX_1=\lambda_0X_1$，$AX_2=\lambda_0X_2$，所以由(1)知$A(kX_1+lX_2)=(AkX_1)+A(lX_2)=\lambda_0(kX_1)+\lambda_0(lX_2)=(kX_1+lX_2)$且$kX_1+lX_2\neq 0$，由定义，任何非零线性组合$\lambda_0X_1+lX_2$都是$A$的属于$\lambda_0$的特征向量。

(3) 设λ_1，λ_2是A的两个不同的特征值$(\lambda_1\neq\lambda_2)$ X_1，X_2分别是A的属于λ_1，λ_2的特征向量，那么X_1与X_2必线性无关。这个性质的证明略去了，读者可在后面的例子中加以验证。

下面将导出特征值与特征向量的求法。

设λ是A的特征值，X是A属于λ的特征向量，于是$AX=\lambda X$，即$AX=\lambda EX$，将左端变号移到右端得$\lambda EX-AX=0$，

即

$$(\lambda E-A)X=0。\qquad (29)$$

这样以来(28)转化为(29)，由于$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$是一个列向量，$\lambda E-A$是一个$n$阶方阵，因此(29)可以看作是关于$x_1$，$x_2$，$\cdots x_n$的齐次线性方程组，系数矩阵是$\lambda E-A$，又由于X是特征向量，必须不等于零，所以要求(29)关于x_1，x_2，$\cdots$，x_n有非零解，而(29)有非零解的充分必要条件是它的系数行列式等于零，即

$$|\lambda E-A|=0 \qquad (30)$$

将n阶行列式$|\lambda E-A|$展开，便是λ的n次多项式。这样，(30)就是λ的n次方程式。由代数基本定理知，(30)关于λ必有n个复数根（其中可能有相同的根）而A的特征值正是(30)的根。因此，称方程(30)为A的特征方程。

这样就得到求矩阵 A 的特征值的方法：求特征方程 $|\lambda E-A|=0$ 的根即可。

设 λ_i 是按上述方法求得的某一个特征值，必有 $|\lambda_i E-A|=0$，因此，以常数矩阵 $\lambda_i E-A$ 为系数矩阵的齐次线性方程组（将 $\lambda=\lambda_i$ 代入（29）即得）：

$$(\lambda_i E-A)X=0 \tag{31}$$

必有非零解 X_i，那么 X_i 就是 A 的属于 λ_i 的特征向量。因此称（31）为 A 的特征方程组。

这样就得到求矩阵 A 的属于 $\lambda_i(i=1,2,\cdots n)$ 的特征向量的方法：求齐次方程组（31）的非零解即可。

（31）的一个基础解系就是 A 属于 λ_i 的所有特征向量中的一个最大无关组。这个基础解系的所有非零的线性组合便是 A 的属于 λ_i 的全部特征向量

例 10　试求矩阵 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ 的全部特征值与全部特征向量

解：先求特征值，

由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1$

特征方程 $|\lambda E-A|=0$ 就是 $\lambda^2+1=0$，求得全部特征值为 i，$-i$，（$i=\sqrt{-1}$）再求特征向量，将特征值 i 代入特征方程组（29）：$(iE-A)X=0$，即

$$\begin{cases}ix_1-x_2=0\\ x_1+ix_2=0\end{cases}$$

它同解于 $ix_1-x_2=0$（因为系数矩阵的秩小于 2 且大于 0，故秩等于1），得基础解系 $\xi_1=(1,i)$

$k\xi_1=(k,ik)$，$k\neq 0$，就表示属于特征值 i 的全部特征向量.

将特征值 $-i$ 代入(29)，$(-iE-A)=X0$，即

$$\begin{cases}-ix_1-x_2=0\\ x_1-ix_2=0\end{cases}$$

求得基础解系为 $\xi_2=(1,-i)$，

$k\xi_2=(k,-ik)$，$k\neq 0$ 就表示属于特征值 $-i$ 的全部特征向量.

例 11　求矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解：$|\lambda E-A|=\begin{bmatrix}\lambda+1 & 2 & -2\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{bmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)^2$，

特征值为 -1，1(1 是二重特征值，实际是两个相同的特征值)

将特征值 -1 代入(29)：即 $(-E-A)X=0$. 即

$$\begin{cases}2x_2-2x_3=0\\ -2x_2\qquad\quad=0\\ \qquad\quad -2x_3=0\end{cases}$$

基础解系为 $\xi_1=(1,0,0)$

将特征值 1 代入(29)：$(E-A)X=0$，即

$$\begin{cases}2x_1+2x_2-2x_3=0\\0x_1+0x_2+0x_3=0\\0x_1+0x_2+0x_3=0\end{cases}$$

基础解系为 $\xi_2=(1,0,1)$　　$\xi_3=(0,1,1)$。

注意：例 11 要求"A的特征值和特征向量"，通常指的是求A的全部特征值，及每一个特征值代入(29)所得齐次线性方程组的一个基础解系。因为由这个基础解系很容易求得属于该特征值的全部特征向量。

例 12　求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$的特征值与特征向量。

解：因为 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda-1&0\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix}$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

所以特征值为 -1，1(二重)。

将 -1 代入(29)：$(-E-A)X=0$，即

$$\begin{cases}-2x_1-x_2=0\\-2x_2=0\\0x_3=0\end{cases}$$

基础解系为 $\xi_1=(0,0,1)$，

将 1 代入(29)：$(E-A)Z=0$。即

$$\begin{cases}0x_1-x_2=0\\0x_2=0\\2x_3=0\end{cases}$$

基础解系为 $\xi_2=(1,0,0)$

注意：例 11 中的 1 是二重特征值，求得的基础解系含两个特征向量，合起来．A 共有 3（等于 n）个线性无关的特性向量．例 12 中的 1 也是二重特征值，但是求得的基础解系只含一个特征向量：合起来，A 共有 2 个（小于 n）线性无关的特征向量．这个现象说明，在 A 有二重以上特征值时将 A 的特征值 λ_1，λ_2，…，λ_d（$d<n$ 是 A 的全部不相同的特征值）一一代入(29)分别求出各自的基础解系，然后将这 d 个基础解系合并起来，所得的特征向量组显然线性无关，但所含特征向量的总个数不一定等于 n，可能小于 n．

例 13　求实对称矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$ 的全部特征值与全部特征向量．

解：
$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda+1&-1-\lambda&0\\-2&\lambda-1&-2\\0&-\lambda-1&\lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)^2\begin{vmatrix}1&-1&0\\-2&\lambda-1&-2\\0&-1&1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2\begin{vmatrix}1&0&0\\-2&\lambda-3&-2\\0&-1&1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)^2\begin{vmatrix}\lambda-3&-2\\-1&1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$$

全部特征值是5，-1(二重)

将特征值5代入(29)：$(5E-A)Z=0$，即

$$\begin{cases}4x_1-2x_2-2x_3=0\\-2x_1+4x_2-2x_3=0\\-2x_1-2x_2+4x_3=0\end{cases}$$

基础解系为 $\xi_1=(1,1,1)$。A的属于5的全部特征向量为 $k\xi_1=(k,k,k)\ k\neq0$。

将特征值-1代入(29)：$(-E-A)X=0$，即

$$\begin{cases}-2x_1-2x_2-2x_3=0\\-2x_1-2x_2-2x_3=0\\-2x_1-2x_2-2x_3=0\end{cases}$$

基础解系为 $\xi_2=(1,0,-1)$，$\xi_3(0,1,-1)$。A的属于-1的全部特征向量为 $k\xi_2+l\xi_3$，k，l不同时为零，(因为 ξ_2，ξ_3 线性无关，所以只要 k，l 不同时为零，就有 $k\xi_2+l\xi_3\neq0$)

注意　例13有三个特点：一是特征值全部是实数，二是属于不同特征值的特征向量是正交的(ξ_1 与 ξ_2 正交，ξ_1 与 ξ_3 正交，由此可知 ξ_1 与属于特征值-1的任何特征向量都正交)，三是二重特征值-1对应的基础解系含有两个(等于它的重数)特征向量，这种现象不是偶然的，可以证明(略)．对于任何实对称矩阵来说，下面三个结论都成立．

(1) 特征值全部是实数．

(2) 属于不同特征值的特征向量是正交的．

(3) $t(t\geqslant1)$重特征值对应的基础解系含有 t 个特征向量．由此知 n 阶实对称矩阵必有 n 个线性无关的特征向量．

我们引出特征值和特征向量的一个重要目的，是解决用正交变换化实二次型为平方和的问题，实二次型的系数矩阵都是实对称矩阵．因此，我们对于有关实对称矩阵的上述三个结论，应该格外留心．

练　习　六

求下列各矩阵的特征值和特征向量：

1．$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

2．$A=\begin{bmatrix}5 & 6 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}$

3．$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

第七节　用正交变换化二次型为平方和

在这一节里，我们将最后解决第五节开始提出的问题：如何用正交变换化二次型为平方和．把前面两节的讨论的主要结果写出来，有下面几个：

（1）实二次型 $f=X'AX$ 的系数矩阵 A 是实对称矩阵，找一个正交变换 $X=CY$ 使 f 成对角形 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+$

$\lambda_n y_n^2$，等价于找一个正交矩阵C使$C^{-1}AC=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$,

或$AC=C\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$.

（2）平方和形式中的系数λ_1，λ_2，…，λ_n是实对称矩阵A的n个特征值，它们都是实数.

（3）正交矩阵C的列向量组是实对称矩阵A的n个标准正交特征向量，并且与特征值有着一定的对应顺序的关系.

（4）实对称矩阵共有n个线性无关的特征向量，它们由各个特征值对应得出的基础解系合并而成，属于不同的特征值的特征向量互相正交，一个k重($k\geqslant 1$)特征值对应的基础解系含有k个特征向量，这k个特征向量线性无关，但不一定互相正交.

细心的读者可能已经发现：如果我们能找出k ($k>1$)重特征值的k个两个正交的特征向量，那么，我们就找到了n个两两正交的特征向量，然后再把它们标准化（即对其中每一个特征向量ξ_i作单位向量$\eta_i=\frac{1}{|\xi_i|}\xi_i$，这个做法称为标准化）那么就得到$A$的$n$个标准正交的特征向量(如果特征向量$\xi_2,\xi_2,\cdots,\xi_n$两两正交，那么$\eta_1=\frac{1}{|\xi_1|}\xi_1,\eta_2=\frac{1}{|\xi_2|}\xi_2,\cdots,\eta_n=\frac{1}{|\xi_n|}\xi_n$也两两正交，而且仍是属于原来特征值的特征向量)。这样一来，我们的问题就解决了.

所以，最后的一个关键问题就是：怎样找出 k ($k>1$)重特征值的 k 个互相正交的特征向量？为此，我们将采用这样的方法：从它的任一个基础解系出发，利用基础解系的非零线性组合就是该特征值的全部特征向量这一性质，适当的选择组合系数，从中找出 k 个互相正交的特征向量。这个方法称为对基础解系正交化，简称正交化。现在举例说明正交化的方法：

不妨设 λ_0 是三重特征值，α_1，α_2，α_3 是属于它的一个基础解系。

令 $\xi_1=\alpha_1$，　　　　（$\because$ α_1 线性无关 $\therefore$ $\xi_1=\alpha_1\neq 0$）

令 $\xi_2=\alpha_2+k_1\xi_1$，适当选取 k_1，使 ξ_2 与 ξ_1 正交。

$(\xi_2,\xi_1)=(\alpha_2+k_1\xi_1,\xi_1)=(\alpha_2,\xi_1)+k_1(\xi_1,\xi_1)$

由 ξ_2 与 ξ_1 正交，知$(\xi_2,\xi_1)=0$，即$(\alpha_2,\xi_1)+k_1(\xi_1,\xi_1)=0$

$(\xi_1,\xi_1)\neq 0$，得 $k_1=-\dfrac{(\alpha_2,\xi_1)}{(\xi_1,\xi_1)}$，代入上式算出 ξ_2。

这样求得的 $\xi_2=\alpha_2+k_1\xi_1$ 是非零向量(因为 α_2 与 $\xi_1=\alpha_1$ 的组合系数至少有一个不为零的数 1)，故 ξ_2 是 λ_0 的特征向量，且与 ξ_1 正交。

令 $\xi_3=\alpha_3+k_2\xi_2+k_1\xi_1$，适当选取系数 k_1，k_2 使 ξ_3 与 ξ_1，ξ_2 都正交。

$$(\xi_3,\xi_1)=(\alpha_3+k_2\xi_2+k_1\xi_1,\xi_1)=(\alpha_3,\xi_1)+k_2(\xi_2,\xi_1)+k_1(\xi_1,\xi_1)$$

要使$(\xi_3,\xi_1)=0$，已知$(\xi_2,\xi_1)=0$，得$(\alpha_3,\xi_1)+k_1(\xi_1,\xi_1)$

$$=0 \text{ 得 } \quad k_1=-\frac{(\alpha_3,\xi_1)}{(\xi_1,\xi_1)}.$$

同理：$(\xi_3,\xi_2)=(\alpha_3,\xi_2)+k_2(\xi_2,\xi_2)+k_1(\xi_1,\xi_2)$.

要使$(\xi_3,\xi_2)=0$，已知$(\xi_1,\xi_2)=0$，得$(\alpha_3,\xi_2)+k_2(\xi_2,\xi_2)=0$ 因为$(\xi_2,\xi_2)\neq 0$ 得

$$k_2=-\frac{(\alpha_3,\xi_2)}{(\xi_2,\xi_2)}.$$

将 k_1，k_2 一起代入原式算出 ξ_3，这样求得的 $\xi_3=\alpha_3+k_2\xi_2+k_1\xi_1$ 的系数中至少有一个不为零的数 1，所以 $\xi_3\neq 0$，故 ξ_3 是 λ_0 的特征向量，且与 ξ_1，ξ_2 都正交。

这样一来，ξ_1，ξ_2，ξ_3 就是 λ_0 的三个两两正交的特征向量。

综上所述，我们完全解决了用正交变换化二次型为平方和的问题。最后，我们给出解题的方法步骤，并举例说明，作为本章的结束。

解题步骤：

第一步，写出二次型 f 的系数矩阵 A，由 $|\lambda E-A|=0$ 求出 A 的特征值，设 λ_1'，$\lambda_2'\cdots$，λ_t' 是 A 的全部两两不同的特征值。

第二步，对于每个 λ'_i，解齐次方程组

$$(\lambda'_i E-A)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=0 \tag{31}$$

求出一个基础解系，把这个基础解系正交化，再标准化，得(31)的一个标准正交基础解系，这样总共得到 A 的 n 个标准正交特征向量，将这些特征向量作为列向量按 λ'_i 的顺序排成一个矩阵 C，C 为正交矩阵

第三步，将 λ_1'，λ_2'，…，λ'_t 中的 $k(k>1)$ 重特征值当

作 k 个相同的一重特征值，这样共有 n 个特征值按原来的顺序排起来，记成 λ_1，λ_2，…，λ_n，作平方和 $\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$。

第四步，二次型 $f=X'AX$ 经正交变换 $X=CY$ 化为平方和 $\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$。

例 14　试用正交变换化二次型

$$f=2x_1^2+6x_2^2+2x_3^2+8x_1x_3$$

为平方和

解：f 的系数矩阵为

$$A=\begin{vmatrix}2 & 0 & 4\\ 0 & 6 & 0\\ 4 & 0 & 2\end{vmatrix}.$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & -4\\ 0 & \lambda-6 & 0\\ -4 & 0\lambda & -2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-6)\begin{vmatrix}\lambda-2 & -4\\ -4 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-6)[(\lambda-2)^2-16]$$

$$=(\lambda-6)^2(\lambda+2)$$

∴　A 的不同特征值有两个 $\lambda'_1=-2$，$\lambda'_2=6$（二重）实际上是三个特征值，$\lambda_1=-2$，$\lambda_2=6$，$\lambda_3=6$，将特征值 -2 代入(29)。$(-2E-A)X=0$。即

$$\begin{cases}-4x_1 \qquad -4x_3=0\\ \qquad -8x_2 \qquad =0\\ -4x_1 \qquad -4x_3=0\end{cases}$$

基础解系为 $\xi_1=(1,0,-1)$，标准化为 $\eta_1=\frac{\xi_1}{|\xi_1|}$

$$=(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}})$$

将特征值 6 代入(29)：$(6E-A)Z=0$，即

$$\begin{cases}4x_1 & -4x_2=0\\ \quad 0x_2 & =0\\ 4x_1 & +4x_2=0\end{cases}$$

基础解系为　$\xi_2=(1,0,1)$　$\xi_3=(0,1,0)$，已经正交.

标准化为　$\eta_2=\frac{\xi_2}{|\xi_2|}=(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}})$，$\eta_3=\frac{\xi_3}{|\xi_3|}$

$=(0,1,0)$

将 η_1，η_2，η_3 当作列向量排为正交矩阵 C

$$C=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix}$$

则经正交变换　$X=CY$，$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2$，就是

$$f=-2y_1^2+6y_2^2+6y_3^2.$$

注意：要把 η_i 与 λ_i 的顺方对应好了．它们可以取不同的顺序，但只要对应好了，都是正确的答案，比如

作正交矩阵　$C_1=(\eta_1,\eta_3,\eta_2)$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

经正交变换　$Z=C_1Y$　则 $f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_3 y_2^2+\lambda_2 y_3^2$

$$=-2y_1^2+6y_2^2+6y_3^2$$

作正交矩阵　$C_2=(\eta_2,\eta_1,\eta_3)$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

经正交变换 $Z=C_2Y$，则 $f=\lambda_2 y_1^2+\lambda_1 y_2^2+\lambda_3 y_3^2$

$=6y_1^2-2y_2^2+6y_3^2$ 等等．这些答案都是对的．

例 15　试用正交变换化二次型

$$f=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$$

为平方和．

解：f 的系数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & -1 & 1\\ -1 & \lambda & 1 & -1\\ -1 & 1 & \lambda & -1\\ 1 & -1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0 & \lambda-1 & \lambda-1 & 1-\lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 0 & \lambda-1\\ 0 & 0 & \lambda-1 & \lambda-1\\ 1 & -1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^3\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & -(1+\lambda)\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda-1)^3\begin{vmatrix}1 & 1 & -(1+\lambda)\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda-1)^3\begin{vmatrix}0 & 1 & -\lambda-2\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^3\begin{bmatrix}1 & -\lambda-2\\ 1 & 1\end{bmatrix}=(\lambda+3)(\lambda-1)^3$$

不同的特征值为-3，1(三重)，而$\lambda_1=-3$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=1$，$\lambda_4=1$。

将特征值-3代入(29)：$(-3E-A)x=0$，即

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

基础解系为 $\xi_1 = (1, -1, -1, 1)$标准化 $\eta_1 = \frac{\xi_1}{|\xi_1|}$

$$= (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

将特征值1代入(29)：$(E-A)X=0$：即

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

基础解系为 $\alpha_2 = (1,1,0,0)$，　　$\alpha_3 = (1,0,1,0,)$，
$\alpha_4 = (-1,0,0,1)$。

将 α_2，α_3，α_4 正交化.

令 $\xi_2 = \alpha_2 = (1,1,0,0)$。

令　$\xi_3 = \alpha_3 + k_2\xi_2$，取 $k_2 = -\frac{(\alpha_3, \xi_2)}{(\xi_2, \xi_2)} = -\frac{1}{2}$

即　$\xi_3 = \alpha_3 - \frac{1}{2}\xi_2 = (1,0,1,0) - \frac{1}{2}(1,1,0,0)$

$$= (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0).$$

令　$\xi_4 = \alpha_4 + k_3\xi_3 + k_2\xi_2$。

取　$k_2 = -\frac{(\alpha_4, \xi_2)}{(\xi_2\xi_2)} = -\frac{(-1)}{1+1} = \frac{1}{2}$

$$k_3 = -\frac{(\alpha_4,\xi_3)}{(\xi_3,\xi_3)}\frac{-\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

即 $\xi_4 = \alpha_4 + \frac{1}{3}\xi_3 + \frac{1}{2}\xi_2 = (-1,0,0,1)$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 1,\ 0\right) + \frac{1}{2}(1,1,0,0)$$

$$= \left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 1\right)$$

把 ξ_2，ξ_3，ξ_4 标准化为 $\eta_2 = \frac{\xi_2}{|\xi_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_2$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ 0\right)$$

$$\eta_3 = \frac{\xi_3}{|\xi_3|} = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}}{2}}\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 1,\ 0\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}},\ 0\right)$$

$$\eta_4 = \frac{\xi_4}{|\xi_4|} = \frac{1}{\frac{\sqrt{12}}{3}}\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 1\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{12}},\ \frac{1}{\sqrt{12}},\ \frac{1}{\sqrt{12}},\ \frac{3}{\sqrt{12}}\right)$$

取 $C=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} \end{bmatrix}$

则 f 经正交变换 $X=CY$，化为平方和 $-3y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2$。

例 16　试用正交变换化二次型

$$f=4x_1x_2-x_3^2$$

为平方和。

解：f 的系数矩阵为

$$A=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda & -2 & 0 \\ -2 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda^2-4)(\lambda+1)=(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda+1)$$

特征值为 2，-2，-1，都是一重特征值，记 $\lambda_1=2$ $\lambda_2=-2$，$\lambda_3=-1$。

将特征值 2 代入(29)，$(2E-A)X=0$。即

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_3 = 0 \end{cases}$$

基础解系为 $\xi_1 = (1,1,0)$。标准化为

$$\eta_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$$

将 $\lambda_2 = -2$ 代入(29)。$(-2E - A)X = 0$，即

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases}$$

基础解系 $\xi_2 = (1,-1,0)$，标准化为

$$\eta_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$$

将 $\lambda_3 = -1$ 代入(29)。$(-E - A)X = 0$，即

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - x_2 = 0 \\ 0x_3 = 0 \end{cases}$$

基础解系为 $\xi_3 = (0, 0, 1)$，已是单位向量，取

$\eta_3 = \xi_3 = (0, 0, 1)$

作正交矩阵 $C = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

经正交变换 $X = CY$，则

$$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - y_3^2$$

练　习　七

1. 用正交变换化下列二次型为平方和：

(1) $f = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_2^3 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$；

(2) $f = x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$

$+ 2x_1x_4 - 2x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4$。

2. 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 \qquad\quad + x_5 = 0 \end{cases}$$

的一个标准正交的基础解系。

本　章　提　要

一、本章主要内容是给出用满秩线性变换及用正交变换化二次型为平方和的两种方法，这是两种不同的方法，读者务必要分清。从几何上看，正交变换是直角坐标变换（转轴与反射）的推广，而满秩线性变换是仿射变换的推广。围绕这两个基本问题，我们讨论了惯性定理，正定二次型，特征值，特征向量及正交矩阵等，这些概念都很重要。

二、用满秩线性变换化二次型为标准形的过程中，要注意两个问题：第一，使用完全配方法（简称配方法）时，要正确理解“完全”二字的含义，就是在每一次配方是对一个变数 x_i 配方，使得在配方后的交叉项中不含有该变数 x_i。

第二，线性变换指的是从n个变数到n个变数的线性变换，即变数的个数在变换前后是相同的，不能减少也不能增多。在平方和中出现的平方项个数小于变数个数的时候，一定要留心这个问题，不要搞错了。

三、任何一个二次型都可经过满秩线性变换化为标准形，但用不同的变换所得到的标准形是不同的。这就要讨论标准形的唯一性问题

惯性定理证明了实二次型的规范形是唯一的。

四、根据实二次型的标准形的唯一性，可以将实二次型进行分类，以便于研究。其中最重要的一类是正定二次型·我们给出了正定二次型的定义及两个判断方法：化成标准形法和顺序主子式法。

五、对于正交矩阵A来说，下列三种说法是等价的：

1. $AA' = A'A = E$；

2. $A^{-1} = A'$；

3. A的行(列)向量组是标准正交向量组。

即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{kj} = \begin{cases} 1, & i=k \\ 0, & i \neq k; \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}a_{il} = \begin{cases} 1, & j=l \\ 0, & j \neq l \end{cases}$$

要注意，如果A是正交矩阵，那么$|A| = \pm 1$，但是反过来不一定成立。

正交变换是系数矩阵为正交矩阵的线性变换。正交变换一定是满秩线性变换，但反过来不一定成立。

六、特征值与特征向量的概念。

如果数λ与非零向量α满足关系

$$A\alpha=\lambda\alpha$$

则称λ是矩阵A的特征向量，α是A的属于λ的特征 向量。

这里要注意两点：第一，特征向量必须是非零向量，换言之，仅有关系$A\alpha=\lambda\alpha$，不能断言α是A的特征 向 量。第二，特征向量与特征值有确定的从属关系。

特征值与特征向量的求法：

1. 高次方程 $|\lambda E-A|=0$ 的全部根λ_i（实数或复数）就是A的特征值。

2. 齐次线性方程组$(\lambda_i E-A)X=0$必有非 零 解 X_i，X_i就是A的属于λ_i的一个特征向量。

上述1，2两个结论互为因果，读者可以从特征值与特征向量的定义中去领会。

要掌握求出一个矩阵的全部特征值，和属于每一个特征值的全部特征向量的方法。

七、用正交变换化二次型为平方和时，要按指出的步骤进行，做到有条不紊。

习　　题

1. 写出下面二次型的矩阵：

(1) $f=3x_1^2+10x_2^2+25x_3^2-12x_1x_2-18x_1x_3+40x_2x_3$；

(2) $f=x_1x_3-x_1x_4+2x_2x_3-5x_2x_4$。

2. 写出下面矩阵(对称矩阵)的二次型

(1) $$A=\begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) $$A=\begin{bmatrix} 0 & -10 & 1 \\ -10 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

3. 用满秩线性变换把下列二次型化成平方和(标准形)，并写出所用的线性变换

(1) $f=x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$;

(2) $f=x_1^2-3x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$;

(3) $f=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$.

4. 用满秩实线性变换把下列二次型化为规范形(法式)，并写出所用的实线性变换:

$$f=x_1^2-2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$$

5. 判断下列矩阵是不是正定矩阵:

(1) $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(2) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

6. 求参数 λ 的值，使下列二次型成为正定的:

(1) $f=5x_1^2+x_2^2+\lambda x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$;

(2) $f=2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2\lambda x_1x_2+2x_1x_3$。

7. 求下面矩阵的特征值和特征向量

(1) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

(2) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$

8. 用正交变换化下面的二次型为平方和：

(1) $f=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_3$;

(2) $f=x_1^2+x_3^2+2x_1x_3$;

(3) $f=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$。

练习题答案与提示

第　一　章

练习一：1．答：是一个数域．

2．答：是一个数域．

练习二：1．答（1）偶排列；（2）奇排列；（3）偶排列；（4）奇排列．

2．答：（1）$i=8$，$j=3$；（2）$i=6$，$j=8$．

提示：i 与 j 只有两种取值方法，要么 $i=3$．$j=8$；要么 $i=8$；$j=3$．对于每一种取值法，都得到一个确定的排列，计算它的逆序数，即可确定．

练习三：1．$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$．

2．$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{5} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1}(a_{i1}+a_{i2}+a_{i3}+a_{i4}+a_{i5})$$

$$\begin{aligned}&= a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}\\ &\quad + a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24}+a_{25}\\ &\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\quad + a_{n-1,1}+a_{n-1,2}+\cdots+a_{n-1,5}.\end{aligned}$$

3．$$\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{n-1} a_{ij} = \sum_{j=1}^{5}(a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{n-1j})$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{11} + a_{21} + \cdots + a_{n-1,1} \\
&\quad + a_{12} + a_{22} + \cdots + a_{n-1,2} \\
&\quad + a_{13} + a_{23} + \cdots + a_{n-1,3} \\
&\quad + a_{14} + a_{24} + \cdots + a_{n-1,4} \\
&\quad + a_{15} + a_{25} + \cdots + a_{n-1,5}.
\end{aligned}
$$

4. $\prod_{i=1}^{k}(a_i - b_i) = (a_1 - b_1)(a_2 - b_2)\cdots(a_k - b_k)$

第　二　章

练习一：1．（1）-18；（2）0．

2．证：（1）

$$
左 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - b_1b_3c_2
$$

$$
右 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2.
$$

比较展开式知　左＝右．

提示：(2)、(3)、(4)、(5)都仿(1)的证法．即按定义展开题中的各行列式，比较一下，便得结论．

3．（1）$x_1 = 1$．$x_2 = 1$．$x_3 = 2$．

（2）$\begin{cases} x_1 = abc \\ x_2 = -(ab + bc + ca) \\ x_3 = a + b + c \end{cases}$

练习二：1．(1)解：因为 $\tau(2\ 4\ 1\ 5\ 3) = 1 + 2 + 1 = 4$．

所以 $a_{12}a_{24}a_{31}a_{45}a_{53}$ 的符号为"+"(2) -；(3) -。

2. 有三项：$\begin{cases} a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52} \\ a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54} \\ a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51} \end{cases}$

3. $(-1)^{n-1}n!$

解：该行列式中的非零元素只有 n 个，它们的位置是 $a_{12}=1$，$a_{23}=2$，…，$a_{n-1,n}=n-1$，$a_{n1}=n$，故

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & n & -1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\tau(23\cdots n1)}a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1n}a_{n1}$$

$$=(-1)^{n-1}1\cdot 2\cdots(n-1)n$$

$$=(-1)^{n-1}n!。$$

4. $(a_1b_2-a_2b_1)(c_1d_2-c_2d_1)$。

5. $x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$。

6. 0。

提示：4. 5. 6 三题均按定义展开，注意找出全部非零项。

练习三：(1) 答：-8。解：将第二、三、四行都减去第一行。得

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$= 1\cdot(-2)(-2)(-2) = -8.$

(2) -3。解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$= 3\cdot1\cdot(-1)(-1)(-1) = -3$。

(3) $a(b-a)^3$。

解：

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & b \\ a & a & b & a \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & a-b & 0 & a-b \\ b-a & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

$$
=(a-b)^3\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
=(a-b)^3\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
=(a-b)^3(-1)^{\tau(1324)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}
$$

$$
=(a-b)^3(-1)^1a\cdot 1\cdot 1\cdot 1=-(a-b)^3a
$$

$$
=a(b-a)^3.
$$

3.

$$
左=\begin{vmatrix} a_1+ka_2+la_3 & a_2+ma_3 & a_3 \\ b_1+kb_2+lb_3 & b_3+mb_3 & b_3 \\ c_1+kc_2+lc_3 & c_2+mb_3 & c_3 \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} a_1+ka_2 & a_2+ma_3 & a_3 \\ b_1+kb_2 & b_2+mb_3 & b_3 \\ c_1+kc_2 & c_1+mc_3 & c_3 \end{vmatrix}
$$

$$
+\begin{vmatrix} la_3 & a_2+ma_3 & a_3 \\ lb_3 & b_2+mb_3 & b_3 \\ lc_3 & c_2+mc_3 & c_3 \end{vmatrix}.
$$

$$
=\begin{vmatrix} a_1+ka_2 & a_2 & a_3 \\ b_1+kb_2 & b_2 & b_3 \\ c_1+kc_2 & c_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1+ka_2 & ma_3 & a_3 \\ b_1+kb_2 & mb_3 & b_3 \\ c_1+kc_2 & mc_3 & c_3 \end{vmatrix}+0
$$

$$
=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ka_2 & a_2 & a_3 \\ kb_2 & b_2 & b_3 \\ kc_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}+0+0
$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}+0+0+0$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\text{右}.$$

练习四：1.（1）-21；（2）-294×10^5；

（3）$-2(x^3+y^3)$；

（4）$(a+b+c)^3$.

3.（1）12；（2）780；（3）$-9\frac{3}{4}$.

练习五：1. $M_{31}=3$，$M_{32}=-2$，$M_{33}=-6$，

$M_{34}=-7$.

2. $A_{11}=-1$，$A_{21}=1$，$A_{31}=2$，$A_{41}=2$.

3. $A_{11}=-1$，$A_{21}=1$，$A_{31}=2$，

$A_{41}=3$，$D=1$.

练习六：1.（1）0；（2）$a^{n-2}(a^2-1)$.

2. 提示：第二、三、…. 各行分别减去第一行.

3. 提示：第1、2、…、$n-1$行分别减去最后一行.

练习七：1. 40；2. -895.

3.（1）$w^2(w+2)^2(w-1)^4$.

练习八：

1. $c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}+a_{14}b_{42}$；

$c_{23}=a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33}+a_{24}b_{43}$；

$c_{34}=a_{31}b_{14}+a_{32}b_{24}+a_{33}b_{34}+a_{34}b_{44}$；

$c_{44}=a_{41}b_{14}+a_{42}b_{24}+a_{43}b_{34}+a_{44}b_{44}$。

练习九：1. $D=-39$，$D_1=-39$，$D_2=-117$，$D_3=-78$，$D_4=39$，$x_1=1$，$x_2=3$，$x_3=2$，$x_4=-1$。

2. $x_1=2$，$x_2=4$，$x_3=-1$，$x_4=-3$。

3. $x_1=1$，$x_2=-1$，$x_3=1$，$x_4=-1$，$x_5=1$。

4. $x_1=0$，$x_2=0$，$x_3=0$，$x_4=0$，$x_5=0$。

第　三　章

练习二：1.

(1) $\begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

2. (1) $X=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$;

(2) $X=\begin{bmatrix} 1-2a & c & -3 \\ 2(a-b) & 36-2c+1 & 3-a+b \\ 1 & -a-3 & c+b-3 \end{bmatrix}$.

练习三：1. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

2. $3\begin{bmatrix} a & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ b & 6 & 7 \end{bmatrix}$.

练习四：1.〔15〕 2. $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} 6 & -7 & 8 \\ 20 & -5 & -6 \end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & b^2+2ac \\ a+b+c & a^2+2ac & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{bmatrix}$. 5. 零矩阵.

6. $\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

7. $[a_{11}x^2+a_{22}y^2+cz^2+2a_{12}xy+2b_1xz+2b_2yz]$.

练习五：1. $(AB)C=A(BC)=\begin{bmatrix} 62 & 2 & 18 \\ 7 & -2 & -3 \\ 53 & -2 & -7 \end{bmatrix}$.

3.（1）$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$.　　（$a$, b, c 为任意数）

（2）$\begin{bmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ b & c & a \end{bmatrix}$.　　（$a$, b, c 为任意数.）

4. (1) $\begin{bmatrix}\lambda_1 u_1 & & & \\ & \lambda_2 u_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n u_n\end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix}\lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k\end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix}1 & n \\ 0 & 1\end{bmatrix}$; (4) $\begin{bmatrix}\cos 3\alpha & -\sin 3\alpha \\ \sin 3\alpha & \cos 3\alpha\end{bmatrix}$;

5. (1) $\begin{bmatrix}-9 & -2 & -10 \\ 6 & 14 & 8 \\ -7 & 5 & -5\end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

练习六：

1. $A' = \begin{bmatrix}1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix}$, $B' = \begin{bmatrix}0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}$,

$A' + B' = \begin{bmatrix}1 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 5\end{bmatrix}$, $A'B' = \begin{bmatrix}0 & 0 & -6 \\ 3 & 1 & -5 \\ 6 & -4 & 5\end{bmatrix}$,

$B'A' = \begin{bmatrix}5 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \\ -1 & 10 & 4\end{bmatrix}$,

$(AB)' = \begin{bmatrix}5 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \\ -1 & 10 & 4\end{bmatrix}$,

$$(A')^2=\begin{bmatrix}6 & 6 & -3\\ 8 & 13 & -2\\ 1 & 8 & 5\end{bmatrix}.$$

2. $(ABC)'=\begin{bmatrix}82 & 140\\ 31 & 42\end{bmatrix}$, $C'B'A'=\begin{bmatrix}82 & 140\\ 31 & 42\end{bmatrix}$.

练习七： 1. $A^*=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$.

2. $B^*=\begin{bmatrix}5 & 9 & -1\\ -2 & -3 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix}$.

3. $C^*=\begin{bmatrix}26 & -10 & -1\\ 3 & 3 & 3\\ 5 & -4 & 5\end{bmatrix}$.

练习八：1. $\begin{bmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{11}{10}\\ \frac{7}{5} & \frac{-1}{5} & -\frac{9}{5}\\ -\frac{6}{5} & \frac{1}{10} & \frac{19}{10}\end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$. 4. $\begin{bmatrix}a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_2^{-1} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_n^{-1}\end{bmatrix}$.

练习九：1．证：因为 A B 可交换，所以有 $AB=BA$ 左乘 A^{-1}，右乘 A^{-1}(因为 A 可逆)，得

$$A^{-1}(AB)A^{-1}=A^{-1}(BA)A^{-1}$$

得
$$EBA^{-1}=A^{-1}BE$$

即
$$BA^{-1}=A^{-1}B$$

即 A^{-1} 与 B 亦可交换．

2．(1) $x_1=5$，$x_2=0$，$x_3=3$，

(2) $x_1=2$，$x_2=13$，$x_3=11$，$x_4=-25$

3．证：因为 A 可逆由求逆公式 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$ 得

$$A^*=|A|A^{-1}$$

两边都取行列式 $|A^*|=|A|^n|A^{-1}|$

因为 $|A|\neq 0$，$|A^{-1}|\neq 0$，所以 $|A^*|\neq 0$，即 A^* 可逆．

练习十：1．$D=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}$，其中 $B_{11}=[3]$，

$B_{12}=[a, \ b-2a]$，$B_{22}=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$．

3．$A^2=\begin{bmatrix} L^2 & 0 & 0 \\ 0 & M^2 & 0 \\ 0 & 0 & N^2 \end{bmatrix}$，$A^p=\begin{bmatrix} L^p & 0 & 0 \\ 0 & M^p & 0 \\ 0 & 0 & N^p \end{bmatrix}$，

$A^{-1}=\begin{bmatrix} L^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & M^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & N^{-1} \end{bmatrix}$．

练习十一：1. $\begin{cases} x = \frac{1}{7}(6 + z + w), \\ y = \frac{1}{7}(-5 + 5z - 9w), \\ z, w \text{ 为任意数.} \end{cases}$

2. $\begin{cases} z = 2x + y - 1 \\ w = 0 \\ x, y \text{ 为任意数.} \end{cases}$

3. $x = y = z = w = 0$. 4. 无解.

练习十二：1. 满秩 $r = 3$. 2. $r = 3$.

3. $r = 2$.

练习十三：1. $r = 3$. 2. $r = 3$. 3. $r = 3$.

练习十四：1. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{bmatrix}$.

2. 因为行列式为 0，所以无逆矩阵.

3. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{95}{99} & \frac{4}{11} & -\frac{28}{99} \\ -\frac{20}{33} & \frac{6}{11} & \frac{8}{33} \\ \frac{20}{3} & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$.

第 四 章

练习二：1. (1) A 的秩 = 3. $\bar{A}$ 的秩 = 4，方程组无解.

线性

(2) A 的秩 = $\bar{A}$ 的秩 = 3，方程组有解，

一般解为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = \dfrac{2}{5} - \dfrac{7}{5}x_3 \\ x_4 = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{6}{5}x_3 \\ x_3 \text{为自由未知量。} \end{cases}$$

2。当 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 2$ 时，方程组有解。

当 $\lambda = 0$ 时，一般解为

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{1}{2}x_1 - x_2 \\ x_4 = x_1 - 2x_2 \\ x_1 \cdot x_2 \text{为自由未知量。} \end{cases}$$

当 $\lambda = 2$ 时，一般解为

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{1}{2}x_1 - x_2 \\ x_4 = -2 + x_1 - 2x_2 \\ x_1, x_2 \text{为自由未知量。} \end{cases}$$

练习三：1。(1) ∵ $|A| \neq 0$，∴ 方程组无非零解。

(2) ∵ $|A| = 0$，∴ 方程组有非零解。

2。一般解为 $\begin{cases} x_1 = -22x_2 + 5x_4 \\ x_3 = 8x_2 - 2x_4 \\ x_2, x_4 \text{为自由未知量。} \end{cases}$

两个不同的非零解可取为 ($x_1 = -22$，$x_2 = 1$，$x_3 = 8$，

$x_4=0$）与（$x_1=5$，$x_2=0$，$x_3=-2$，$x_4=1$）。

3．当 $\lambda=-2$ 或 $\lambda=1$ 时，有非零解，当 $\lambda=-2$ 时，一般解为 $\begin{cases} x_1=x_3, \\ x_2=x_3, \\ x_3 \text{ 为自由未知量。} \end{cases}$

当 $\lambda=1$ 时，一般解为 $\begin{cases} x_1=-x_2-x_3, \\ x_2, x_3 \text{ 为自由未知量。} \end{cases}$

练习四：2．（1）（3，-10，13，20），

（2）$\alpha=(1, 2, 3, 4)$。

4．（1）线性相关，（2）线性无关。

（3）当 $\lambda=8$ 时，线性相关，当 $\lambda\neq 8$ 时，线性无关。

6．（1）秩＝3，α_1，α_2，α_3 是一个最大无关组.

（2）秩＝2，α_3，α_4 是一个最大无关组.

7．（1）$\eta_1=(7, 0, 2, -10)$，$\eta_2=(0, 7, -1, 5)$ 为一个基础解系.

（2）$\eta_1=\left(\frac{19}{8}, \frac{7}{8}, 1, 0, 0\right)$

$\eta_2=\left(\frac{3}{8}, \frac{-25}{8}, 0, 1, 0\right)$，$\eta_3=\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 1\right)$是一个基础解系.

8．通解为 $\gamma=\left(\frac{5}{6}, 1, 0, -\frac{1}{6}\right)+k(-3, -5, 1, 0)$.

k 为任意数。

第　五　章

练习一：1. $f=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix} 2 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & -7 & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$，

f 的秩 $=3$。

2. $f=y_1^2-y_2^2+y_1y_3-y_2y_3$。

练习二：1. 经变换 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$，

$f=y_1^2-y_2^2$。

2. 经变换

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix},$$

$f=y_1^2-y_2^2-y_3^2-\frac{3}{4}y_4^2$。

练习三：1. 练习二中的第 1 题已是规范形，$p=1$，

$q=1$，第二题再经变换$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\\z_4\end{bmatrix}$，

$f=z_1^2-z_2^2-z_2^2-z_4^2$，$p=1$，$r-p=3$。

2．经变换$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&2&2\\0&\sqrt{2}&\frac{3}{\sqrt{2}}&\frac{3}{\sqrt{2}}\\0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&0&0&\sqrt{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$，

$f=y_1^2-y_2^2+y_3^2-y_4^2$，$p=2$，$r-p=2$。

练习四：1．不是正定的．2．是正定的．

练习五：1．(1) $(\alpha,\ \beta)=6$，(2)$(\alpha,\ k\beta+l\gamma)$ $=0$．2．所求向量为$\alpha_0=\left(\frac{1}{\sqrt{7}},\ \frac{1}{\sqrt{7}},\ \frac{-1}{\sqrt{7}}\ \frac{2}{\sqrt{7}}\right)$．

3．比如$\beta_1=\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，$\beta_2=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ 0,\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

即为所求．

4．(1)是正交变换．(2)不是正交变换．

练习六、1．特征值为$\lambda_1=2$，（三重），最大无关特征向量组为：

$$\begin{cases}\xi_1=(1,\ 0,\ 0,\ 1)\\ \xi_2=(1,\ 0,\ 1,\ 0)\\ \xi_3=(1,\ 1,\ 0,\ 0).\end{cases}$$

$\lambda_2=-2$(一重)，特征向量是$\xi_4=(-1,\ 1,\ 1,\ 1)$.

2. 特征值为$\lambda_1=2$，$\lambda_2=1+\sqrt{3}$，$\lambda_3=1-\sqrt{3}$，对应的特征向量分别为$\xi_1=(-2,\ 1,\ 0)$，$\xi_2=(-3,\ 1,\ -2+\sqrt{3})$，$\xi_3=(-3,\ 1,\ -2-\sqrt{3})$.

3. 特征值　　　　　　　　特征向量

$\lambda_1=1$(二重)　　$\begin{cases}\xi_1=(\ \ 0,\ 1,\ 0),\\ \xi_2=(\ \ 1,\ 0,\ 1),\\ \xi_3=(-1,\ 0,\ 1).\end{cases}$

$\lambda_2=-1$

练习七：1.（1）经正交变换

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}.$$

$$f=2y_1^2+5y_2^2-y_3^2.$$

（2）经正交变换

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}.$$

线
性

$$f = 2y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2 - 2y_4^2.$$

2. $\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0)$,

$$\eta_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-1,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0),$$

$$\eta_3 = \frac{1}{3\sqrt{35}}(7,\ -6,\ 6,\ 13,\ 5).$$

是一个标准正交基础解系。